- Interpretações do Tempo -

A noção de tempo pode ser representada de diversas maneiras nos sistemas computacionais.

- Tempo Lógico é definido a partir de relações de precedência entre eventos permitindo estabelecer ordens causais entre conjunto de eventos.
- Tempo Físico é um tempo métrico que permite representar quantitativamente a distância entre eventos e estabelecer ordens totais entre eventos.
- Tempo Contínuo segue a natureza uniforme e contínua do tempo físico e é isomorfo ao conjunto dos reais.
- Tempo Discreto é uma simplificação do tempo contínuo onde a relação de isomorfismo é com o conjunto dos naturais.
- **Tempo Global** fornece uma única referência temporal para todos os componentes do sistema.
- **Tempo Local** é a noção em que cada componente do sistema tem sua própria referência temporal.

Classificação da Técnicas de Avaliação de Desempenho

Modelos Temporizados

- Com todos estes pontos de vistas, diversos modelos têm sido propostos na literatura para tratar (modelar e analisar) os sistemas sob o ponto de vista temporal. Dentre os modelos temporais, podemos ressaltar:
- **Lógicas Temporais:** ***Linear Time Temporal Logic, Causal Temporal Logic***
- **Álgebras de Processos Temporais :** ***Timed CSP***
- **Autômatos Temporizados**
- **Cadeias de Markov**
- **Redes de Fila**
- **Redes de Petri Temporizadas:** ***Timed PN, Time PN, SPN, GSPN, DSPN***

Modelos Temporizados

- Algumas destas classes de modelos temporizados possibilitam a análise temporal dos sistemas seja sob o ponto de vista determinístico ou sob o ponto de vista probabilístico. Para modelagem e avaliação de sistemas críticos, são de particular interesse os modelos que possibilitem a representação de tempos físicos e não apenas o tempo lógico.
- Os modelos que possibilitam a especificação do tempo físico, podem representar os tempo de foras distintas, por exemplo:
  - por **Intervalos**
  - de forma **Determinística**
  - de forma **Probabilística**

Modelagem para Análise de Desempenho

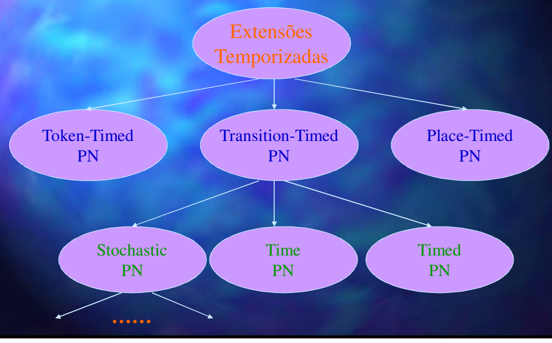
- Algumas Medidas
  - Tempo de Manufatura
  - *Throughput*
  - Utilização
  - Capacidade
  - Confiabilidade

Análise de Desempenho

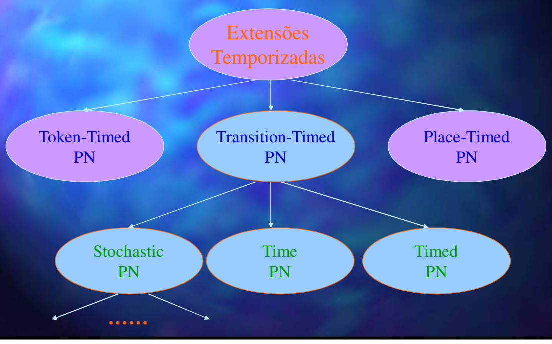
- Analíticos
  - Determinísticos
    - Melhor e pior casos
  - Probabilisticos
    - Valores prováveis
- Simulação
    - Análise exaustiva
- Implementação real
  - Medidas obtidas do sistema real
  - *Benchmarks*
  - Protótipos

Redes de Petri

Redes Temporizadas



Redes Temporizadas



Redes Temporizadas

- Ramchandani, 1973 - Transition Timed Net
- Merlin, 1976 - Transition Time Net
- Sifakis, 1977 - Place Timed Net

Redes Temporizadas Estocásticas

- Natkin -1980
- Molloy - 1981
- Marsan et al. - 1984

É uma rede temporizada onde o *delay* associado à transição é uma variável aleatória de distribuição exponencial

Redes Temporizadas

- Redes de Petri com Lugares Temporizados (PTPN) (Sifakis77)
- Definição: PTPN=$(P,T,F,K,W,M_0,\Gamma,\upsilon)$, onde

P é o conjunto de lugares,

T o conjunto de transições,

$F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$ uma relação que representa os arcos

W – Valoração (peso dos arcos) - $W: F \rightarrow N$

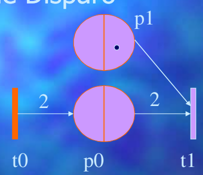
M_0- Marcação inicial - $M_0:P \rightarrow N$

$\Gamma=\{\gamma_1, \gamma_2,..., \gamma_i,...\}$ números reais denominada base de tempo.

$\upsilon:P \rightarrow \Gamma$ um mapeamato que $\upsilon(p) = \gamma_j$

Redes Temporizadas
- PTPN -

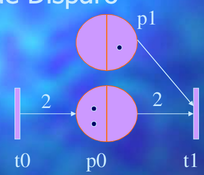
- Regra de Disparo



υ(p0) = 3

Redes Temporizadas
- PTPN -

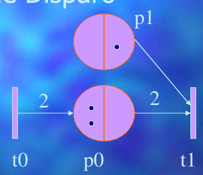
- Regra de Disparo



υ(p0) = 3 Instante=0

Redes Temporizadas
- PTPN -

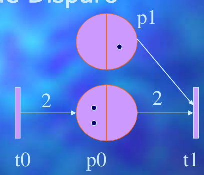
- Regra de Disparo



υ(p0) = 3 Instante=1

Redes Temporizadas
- PTPN -

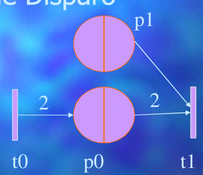
- Regra de Disparo



υ(p0) = 3 Instante=2

Redes Temporizadas
- PTPN -

- Regra de Disparo



υ(p0) = 3 Instante=3

Redes de Petri Temporizadas
- Tempo Associado às Transições -

- Conceitos Básicos:
  - Duração (disparo em três fases)
    - Marcas são consumidas dos lugares de entrada
    - Há uma duração
    - Marcas são geradas no lugares de saída
  - Disparo atômico
    - As marca permanecem nos lugares de entrada pelo período igual ao *delay* associada à transição. Após o *delay* as marcas são consumidas e geradas nos lugares de saída imediatamente.

Redes de Petri Temporizadas
- Tempo Associado às Transições -

- Conceitos Básicos:
  - Duração (disparo em três fases)
    - Pode ser representada por uma rede com disparo atômico
    - Modelo mais compacto
    - O estado é uma informação mais complexa do que o modelo não-temporizado
  - Disparo atômico
    - Pode representar o modelo com duração
    - O conjunto de marcações alcançáveis é um sub-conjunto das marcações do modelo não-temporizado.

Redes de Petri Temporizadas
- Tempo Associado às Transições -

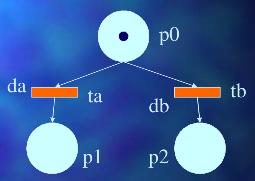
- Conceitos Básicos:
  - Regras de Seleção:
    - Pré-seleção: (duração e *delay*)
      - Prioridade
      - Probabilidade
    - *Race* (corrida): (*delay*)
      - Transições habilitadas com menor *delay* são disparadas

Redes de Petri Temporizadas
- Tempo Associado às Transições -

- Conceitos Básicos:
  - Quando uma das transições conflitantes é desabilitada pelo disparo da outra, o que acontece com o *timer* da que ficou desabilitada quando a mesma tornar-se habilitada outra vez?

Redes de Petri Temporizadas
- Tempo Associado às Transições -

- Como fica a memorização do tempo de habilitação anterior?
- *Continue*
  - O *timer* associado à transição mantem o valor atual e quando a transição se tornar novamente habilitada o valor do *timer* iniciará daquele valor.
- *Restart*
  - Quando a transição for novamente habilitada o *timer* será re-iniciado



Redes de Petri Temporizadas
- Tempo Associado às Transições -

- Conceitos Básicos:
  - O que acontece com o *timer* das transições habilitadas após o disparo de uma transição?
    - Todas as transições. Não somente as transições conflitantes.

•Algumas políticas de memória podem ser construídas

Redes de Petri Temporizadas
- Tempo Associado às Transições -

- Conceitos Básicos:
  - *Resampling*
    - Após cada disparo os *timers* de TODAS as transições são re-iniciado (*restart*)
    - Não há memória
    - Após descartar todos os *timers*, os valores iniciais são associados a todas as transições que se tornarem habilitadas na nova marcação.

Redes de Petri Temporizadas
- Tempo Associado às Transições -

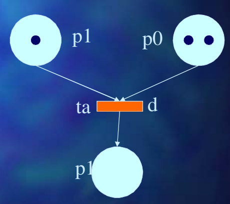
- Conceitos Básicos:
  - *Enabling Memory*
    - Após cada disparo os *timers* das transições que ficaram desabilitadas são re-iniciados (*restart*)
    - As transições que permaneceram habilitadas com o disparo matêem seus valores presentes(*continue*)

Redes de Petri Temporizadas
- Tempo Associado às Transições -

- Conceitos Básicos:
  - *Age Memory*
    - Após cada disparo os *timers* de todas as transições são mantidos em seus valores presentes (*continue*)

Redes de Petri Temporizadas
- Tempo Associado às Transições -

- Conceitos Básicos:
  - Grau de Habilitação (*Enabling Degree)*
    - É o número de vezes que uma determinada transição pode ser disparada, numa determinada marcação, antes de se torna desabilitada.
    - Quando o grau de habilitação é maior que um, atenção especial à semântica de temporização deve ser considerada.

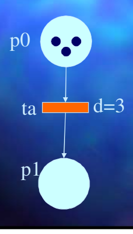


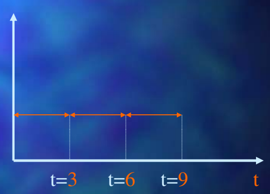
Redes de Petri Temporizadas
- Tempo Associado às Transições -

- Conceitos Básicos:
  - Semântica de Temporização
    - *Single-server firing semantics*
    - *Infinite-server firing semantics*
    - *Multiple-server firing semantics*
      - K é o máximo grau de paralelismo. Quando k→∞ , *Multiple-server firing semantics* é igual a *infinite-server firing semantics.*

Redes de Petri Temporizadas
- Tempo Associado às Transições -

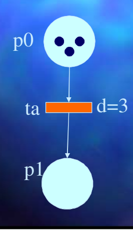
- Conceitos Básicos:
  - *Single-server firing semantics*

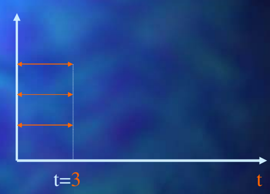




Redes de Petri Temporizadas
- Tempo Associado às Transições -

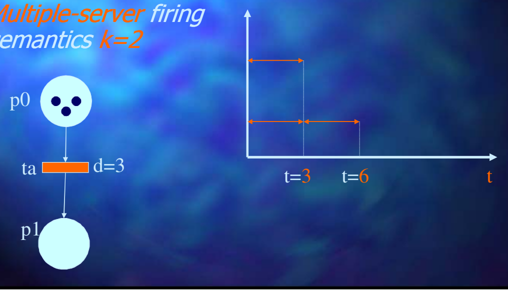
- Conceitos Básicos:
  - *Infinite-server firing semantics*





Redes de Petri Temporizadas - Tempo Associado às Transições -

- Conceitos Básicos:
  - *Multiple-server firing semantics k=2*



Redes Temporizadas com Transições Temporizadas

- Time Petri Nets (Merlin76)
- Definição: TPN=(P,T,F, W,M_0,I), onde

P é o conjunto de lugares,

T o conjunto de transições,

F $\subseteq$ (P $\times$ T) $\cup$ (T $\times$ P) uma relação que representa os arcos

W – Valoração (peso dos arcos) - W: F $\rightarrow$ $\aleph$

M_0- Marcação inicial - M_0: $\aleph^P$

I:T $\rightarrow$ (D_{min} , D_{max})

D_{min}: $(\Re^+ \cup \{0\})^T$, D_{max}:$(\Re^+ \cup \{0\})^T$, onde I(t_i)=(d^i_{min}, d^i_{max}), $d^i_{max} \geq d^i_{min}$

Redes Temporizadas com Transições Temporizadas

- *Resampling* (Merlin76)/*Enabling Memory*(Starke87) Definição- Conjunto de Transições Habilitadas-: TPN=(P,T,F, W,M_0,I), onde ET(M_i)={t $\in$ T | $M_i \geq$ W(p_j,t), $\forall p_j \in$ P}
- Definição - *Timer Clock* -: TC: T $\rightarrow$ $\aleph$ é uma função parcial que associa às transições uma variável de tempo (*timer clock*).

OU

- Definição - *Timer Clock* -: TC: ET(M_i) $\rightarrow$ $\aleph$ é uma função que associa às transições habilitadas em uma marcação M_i uma variável de tempo (*timer clock*).

Redes Temporizadas com Transições Temporizadas

- Time Petri Nets
- Definição- Intervalo Dinâmico de Disparo -: Seja uma TPN=(P,T,F, W,M_0,I).

  I_D: T $\rightarrow$ (DLB, DUB)
- DLB: $(\Re^+ \cup \{0\})^T$, DUB: $(\Re^+ \cup \{0\})^T$
- Geração do I_D(t)

  I_D(t) = (max{0, D_{min}-TC(t)}, D_{max}-TC(t))

Redes Temporizadas com Transições Temporizadas

- Time Petri Nets
- Definição- Conjunto de Estados_:Seja uma TPN=(P,T,F, W,M_0,I). S $\subseteq$ M $\times \aleph^{|ET(Mi)|}$ define o espaço de estados de uma TPN, onde s = (M,ET(M),TC). s $\in$ S.
- Definição- Conjunto de Transições Disparáveis -: Seja um estado s' $\in$ S. O Conjunto de transições disparáveis em s' é definido por:

FT(s')={t | t $\in$ ET(M') $\wedge$ DLB(t) $\leq$ min{DUB(t_k), $\forall t_k \in$ ET(M)} } – Transições que serão eleitas para disparo quando as restrições temporais forem satisfeitas.

Redes Temporizadas com Transições Temporizadas

- Time Petri Nets
- Definição- Conjunto de Transições Disparáveis -: Seja um estado s' $\in$ S. O Conjunto de transições disparáveis em s' é definido por:

FT(s')={t | t $\in$ ET(M') $\wedge$ DLB(t) $\leq$ min{DUB(t_k), $\forall t_k \in$ ET(M)} }.

- Definição- Domínio de Disparo:

FD_s(t)=[DLB(t), min{DUB(t_k), $\forall t_k \in$ ET(M)}]

Redes Temporizadas com Transições Temporizadas

- Time Petri Nets

Definition 2.5 (Time Petri net) *A time Petri net is defined by a tuple $(\mathcal{N}, I)$, where $\mathcal{N}$ is the underlying Petri net, and $I : T \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ represents the timing constraints, such that $I(t) = (EFT(t), LFT(t))$ $\forall t \in T$, $EFT(t) \leq LFT(t)$. $EFT(t)$ is the Earliest Firing Time, and $LFT(t)$ is the Latest Firing Time.*

(Enabled Transitions) *A set of enabled transitions, at marking m_i, is denoted by: $ET(m_i) = \{t \in T \mid m_i(p_j) \geq W(p_j, t), \forall p_j \in P\}$*

The time elapsed, since the respective transition enabling, is denoted by a clock vector $c \in (\mathbb{N} \cup \{\#\})^{|T|}$, where # represents the undefined value for not enabled transitions. As an example, the clock

Redes Temporizadas com Transições Temporizadas

- Time Petri Nets

A transition $t \in T$ is *enabled*, if each input place $p \in P$ contains at least $W(p, t)$ tokens. The time elapsed, since the respective transition enabling, is denoted by a clock vector $c \in (\mathbb{N} \cup \{\#\})^{|T|}$, where # represents the undefined value for not enabled transitions. As an example, the clock

Dynamic Upper Bound. The dynamic firing interval is computed in the following way: $I_D(t) = [DLB(t), DUB(t)]$, where $DLB(t) = max(0, EFT(t) - c(t))$, $DUB(t) = LFT(t) - c(t)$. Whenever $DLB(t) = 0$, t can fire, and, when $DUB(t) = 0$, t must fire, since *strong firing mode* is adopted.

Definition 2.6 (States) *Let $\mathcal{P}_\mathcal{T}$ be a time Petri net, $M \subseteq \mathbb{N}^{|P|}$ be the set of reachable markings of $\mathcal{P}_\mathcal{T}$, and $C \subseteq (\mathbb{N} \cup \{\#\})^{|T|}$ be the set of clock vectors. The set of states S of $\mathcal{P}_\mathcal{T}$ is given by $S \subseteq (M \times C)$, that is, a state is defined by a marking, and the respective clock vector.*

Definition 2.7 (Firable Transitions) *Let $\mathcal{P}_\mathcal{T}$ be a time Petri net, the set of firable transitions at state $s \in S$ is defined by: $FT(s) = \{t_i \in ET(m) \mid \; DLB(t_i) \leq \min(DUB(t_k)), \forall t_k \in ET(m)\}$.*

Definition 2.8 (Firing Domain) *The firing domain for a transition t at state s, is defined by the interval: $FD_s(t) = [DLB(t), \min(DUB(t_k))], \forall t_k \in ET(m)$.*

Redes Temporizadas com Transições Temporizadas

- Time Petri Nets

Definition 2.9 (Reachable States) *Let $\mathcal{P}_\mathcal{T}$ a time Petri net, and $s_i = (m_i, c_i)$ a reachable state. $s_{i+1} = \texttt{fire}(s_i, (t, \theta))$ denotes that firing a transition t at time θ from the state s_i, the reached state $s_{i+1} = (m_{i+1}, c_{i+1})$ is obtained from:*

- $\forall p \in P,\ m_{i+1}(p) = m_i(p) - W(p, t) + W(t, p)$;

- $\forall t_j \notin ET(m_{i+1}), c_{i+1}(t_j) = \#$;
- $\forall t_k \in ET(m_{i+1}),\ C_{i+1}(t_k) = \begin{cases} 0, & if(t_k = t) \\ 0, & if(t_k \in ET(m_{i+1}) - ET(m_i)) \\ C_i(t_k) + \theta, & else \end{cases}$

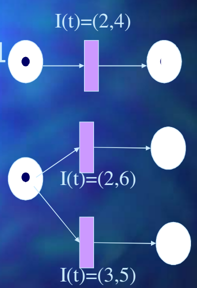
Redes Temporizadas com Transições Temporizadas

- Time Petri Nets

Redes Temporizadas com Transições Temporizadas

- Time Petri Nets

$Tc(t_0) = Tc(t_1) = Tc(t_2) = 1$
$DLB(t_0) = 1$, $DUB(t_0) = 3$
$DLB(t_1) = 1$, $DUB(t_1) = 5$
$DLB(t_2) = 2$, $DUB(t_2) = 4$
$FT(s') = \{t \mid t \in ET(M') \wedge DLB(t) \leq \min\{DUB(t_k), \forall t_k \in ET(M)\}\}$.



$FT(s_0) = \{t_0, t_1, t_2\}$

Redes Temporizadas com Transições Temporizadas

- ID(t)=(max{0,2-0},4-0)=(2,4) τ=0
- ID(t)=(max{0,2-1},4-1)=(1,3) τ=1
- ID(t)=(max{0,2-2},4-2)=(0,2) τ=2, disparável
- ID(t)=(max{0,2-3},4-3)=(0,1) τ=3, disparável
- ID(t)=(max{0,2-4},4-4)=(0,0) τ=4, disparável

I(t)=(2,4)

Redes Temporizadas com Transições Temporizadas

Semântica de Disparo de Transição

- Uma transição t_j é disparável se estiver habilitada
  - Regras de habilitação

  $M[t_j >$, $M(pi) >= I(pi, t_j)$
  $\forall\ pi \in P$

durante o intervalo $I(t_j)=(d^j_{min}, d^j_{max})$,
Ou seja, t_j só será disparável se $tc(t_j) \geq d^j_{min}$

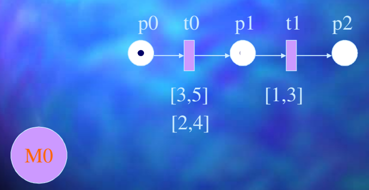
- e terá que disparar até $tc(t_j) \geq d^j_{max}$ (*strong semantics*)

ou

- e poderá disparar até $tc(t_j) \geq d^j_{max}$ (*weak semantics*)
- *Resampling* (Merlin76)/*Enabling Memory*(Starke87)
- Regras de disparo

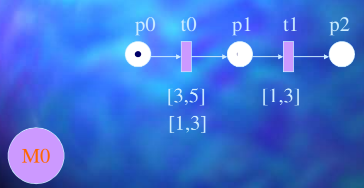
  Se $M[t_j > M'$
  $M'(pi)=M0(pi) - I(pi, t_j)+O(pi, t_j)$, $\forall\ pi \in P$

Redes Temporizadas com Transições Temporizadas



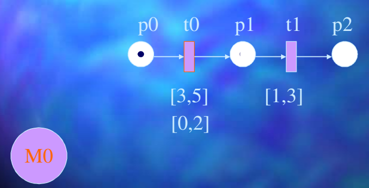
tc(t0)=1
tc(t1)= indefinido

Redes Temporizadas com Transições Temporizadas



tc(t0)=2
tc(t1)= indefinido

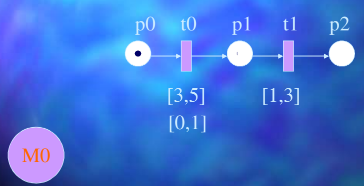
Redes Temporizadas com Transições Temporizadas



tc(t0)=3
tc(t1)= indefinido

t0 pode disparar

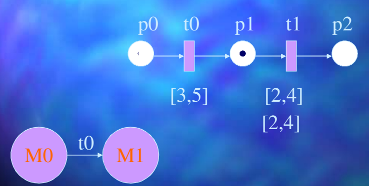
Redes Temporizadas com Transições Temporizadas



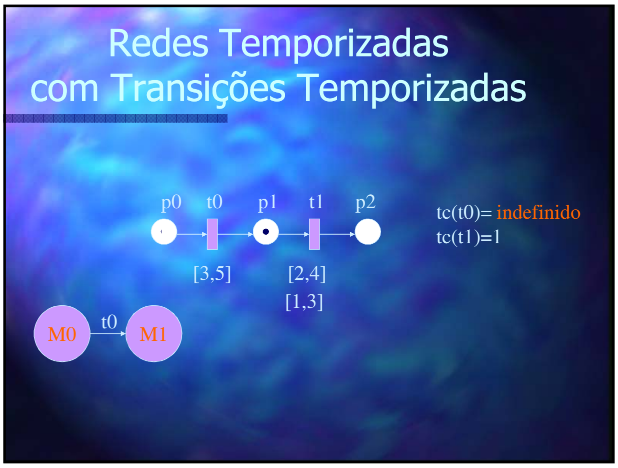
tc(t0)=4
tc(t1)= indefinido

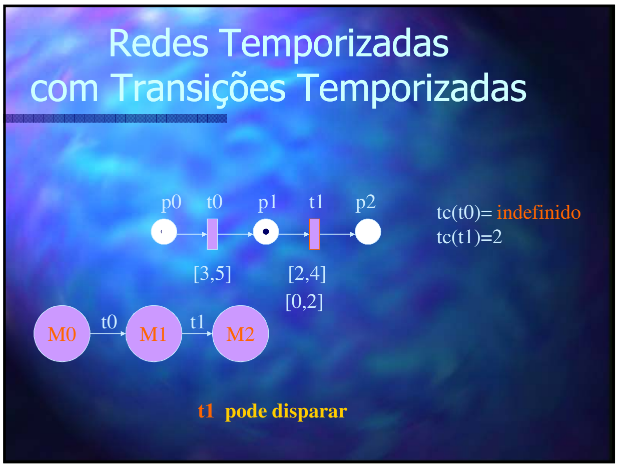
t0 pode disparar

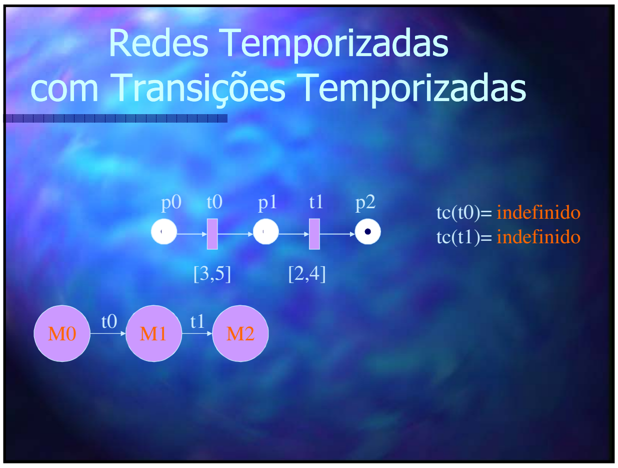
Redes Temporizadas com Transições Temporizadas



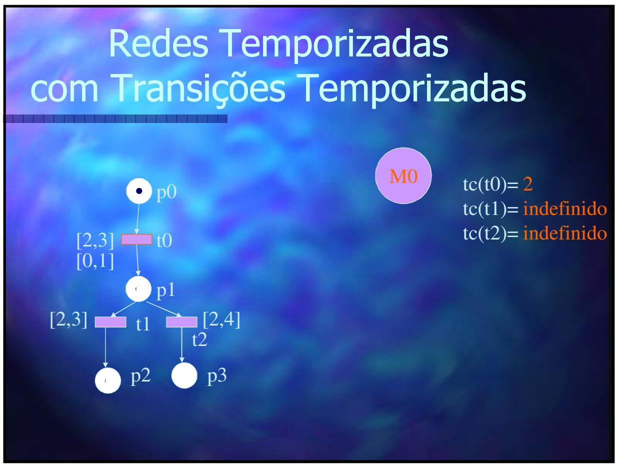
tc(t0)= indefinido
tc(t1)=0

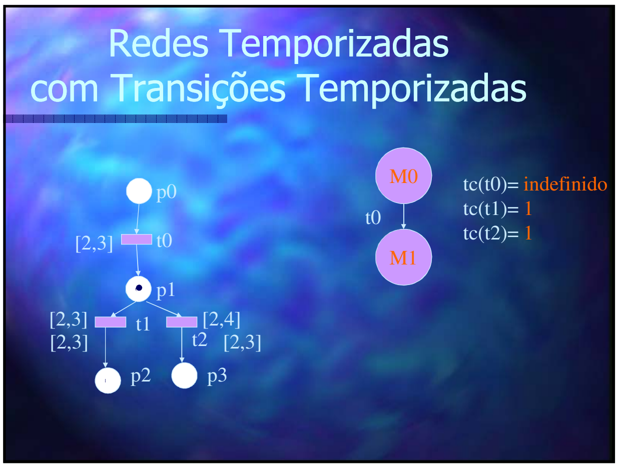

Redes Temporizadas
com Transições Temporizadas
p0 t0 p1 t1 p2
[3,5]
[2,4]
[1,3]
M0 t0 M1
tc(t0)= indefinido
tc(t1)=1

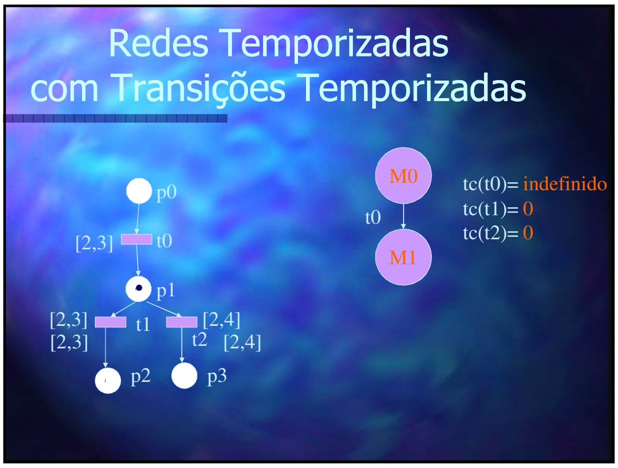

Redes Temporizadas
com Transições Temporizadas
p0 t0 p1 t1 p2
[3,5]
[2,4]
[0,2]
M0 t0 M1 t1 M2
tc(t0)= indefinido
tc(t1)=2
t1 pode disparar

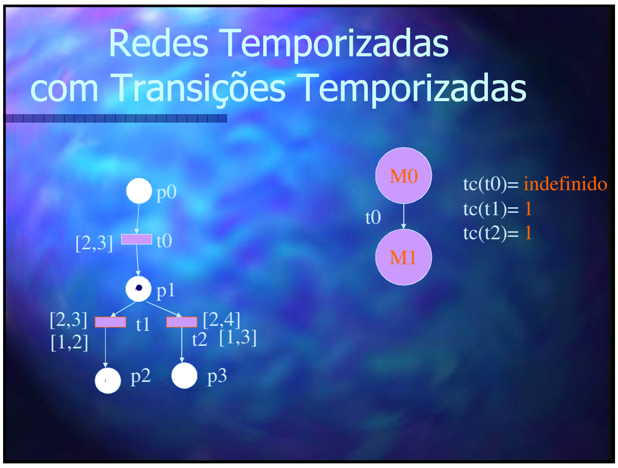

Redes Temporizadas
com Transições Temporizadas
p0 t0 p1 t1 p2
[3,5]
[2,4]
M0 t0 M1 t1 M2
tc(t0)= indefinido
tc(t1)= indefinido

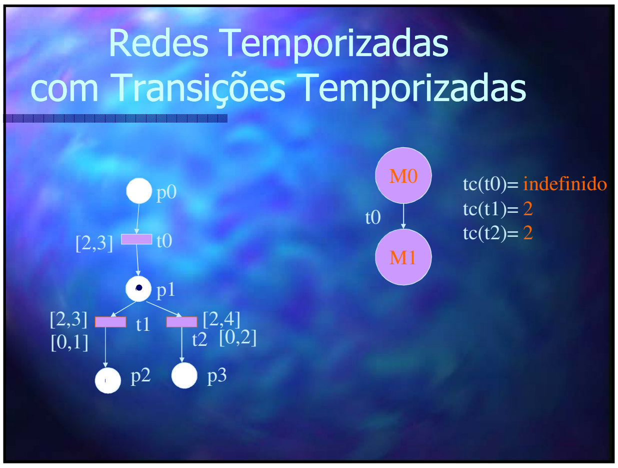

Redes Temporizadas
com Transições Temporizadas
p0
[2,3] t0
[1,2]
p1
[2,3] t1
[2,4] t2
p2 p3
M0
tc(t0)= 1
tc(t1)= indefinido
tc(t2)= indefinido

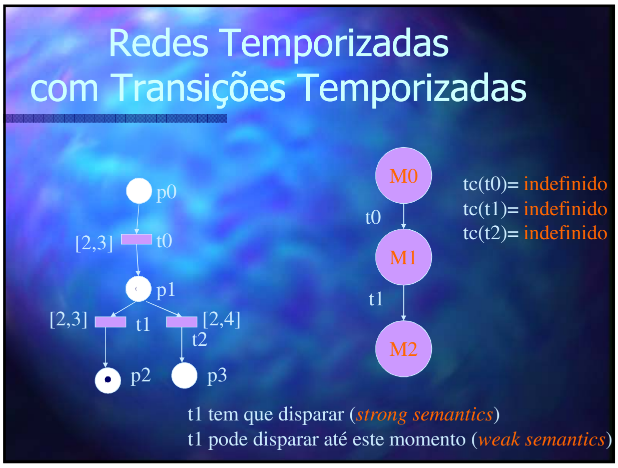

Redes Temporizadas
com Transições Temporizadas
p0
[2,3] t0
[0,1]
p1
[2,3] t1
[2,4] t2
p2 p3
M0
tc(t0)= 2
tc(t1)= indefinido
tc(t2)= indefinido


Redes Temporizadas
com Transições Temporizadas
p0
[2,3] t0
p1
[2,3] t1
[2,3]
[2,4] t2 [2,3]
p2 p3
M0 t0 M1
tc(t0)= indefinido
tc(t1)= 1
tc(t2)= 1

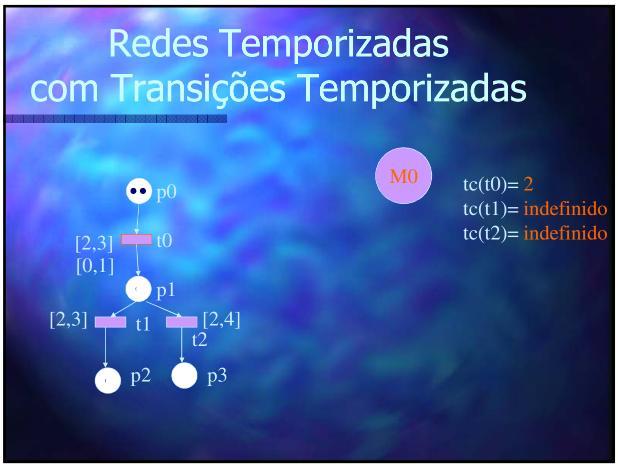

Redes Temporizadas
com Transições Temporizadas
p0
[2,3]
t0
p1
[2,3]
[2,3]
t1
[2,4]
t2
[2,4]
p2
p3
M0
t0
M1
tc(t0)= indefinido
tc(t1)= 0
tc(t2)= 0

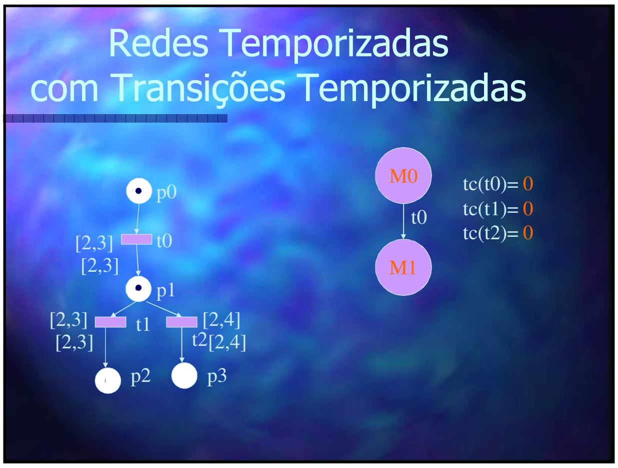

Redes Temporizadas
com Transições Temporizadas
p0
[2,3]
t0
p1
[2,3]
[1,2]
t1
[2,4]
t2
[1,3]
p2
p3
M0
t0
M1
tc(t0)= indefinido
tc(t1)= 1
tc(t2)= 1

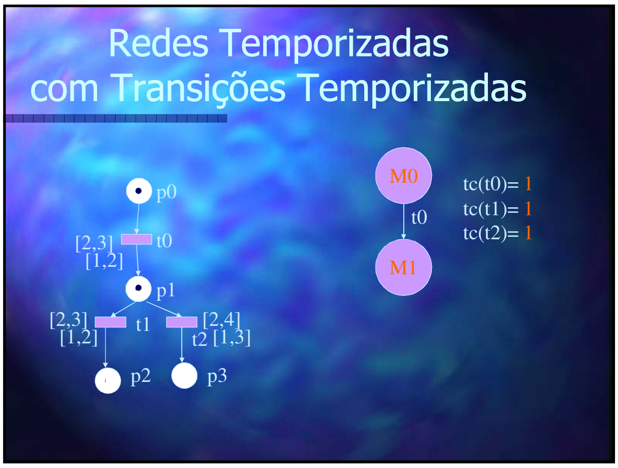

Redes Temporizadas
com Transições Temporizadas
p0
[2,3]
t0
p1
[2,3]
[0,1]
t1
[2,4]
t2
[0,2]
p2
p3
M0
t0
M1
tc(t0)= indefinido
tc(t1)= 2
tc(t2)= 2

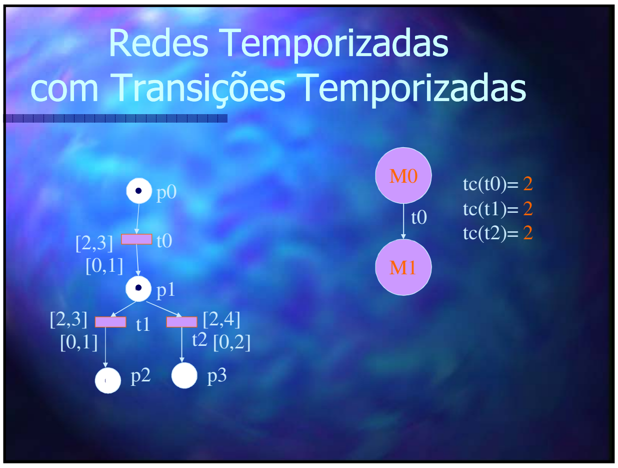

Redes Temporizadas
com Transições Temporizadas
p0
[2,3]
t0
p1
[2,3]
t1
[2,4]
t2
p2
p3
M0
t0
M1
t1
M2
tc(t0)= indefinido
tc(t1)= indefinido
tc(t2)= indefinido
t1 tem que disparar (strong semantics)
t1 pode disparar até este momento (weak semantics)

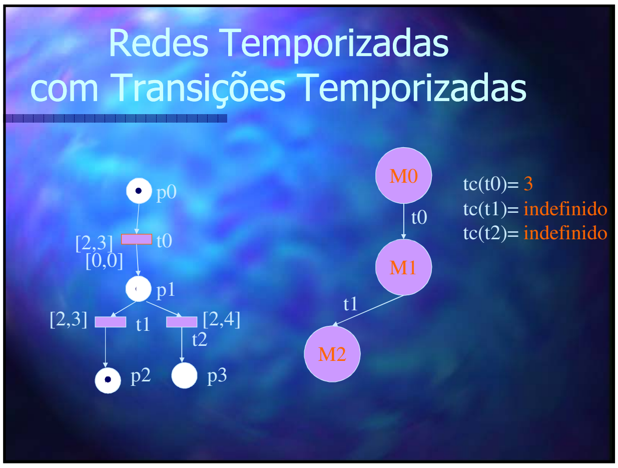

Redes Temporizadas
com Transições Temporizadas
p0
[2,3]
[1,2]
t0
p1
[2,3]
t1
[2,4]
t2
p2
p3
M0
tc(t0)= 1
tc(t1)= indefinido
tc(t2)= indefinido

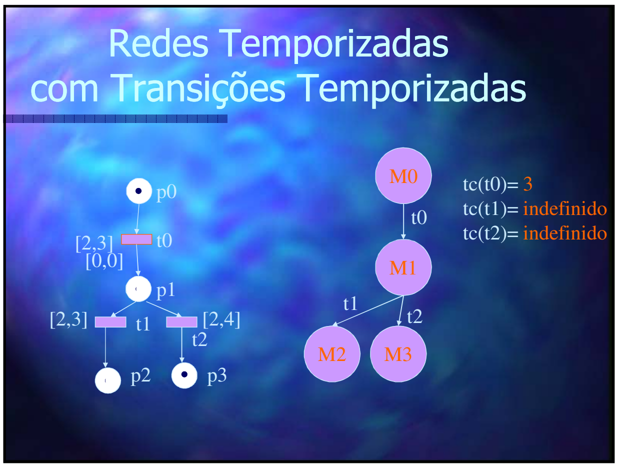

Redes Temporizadas
com Transições Temporizadas
p0
[2,3]
[0,1]
t0
p1
[2,3]
t1
[2,4]
t2
p2
p3
M0
tc(t0)= 2
tc(t1)= indefinido
tc(t2)= indefinido

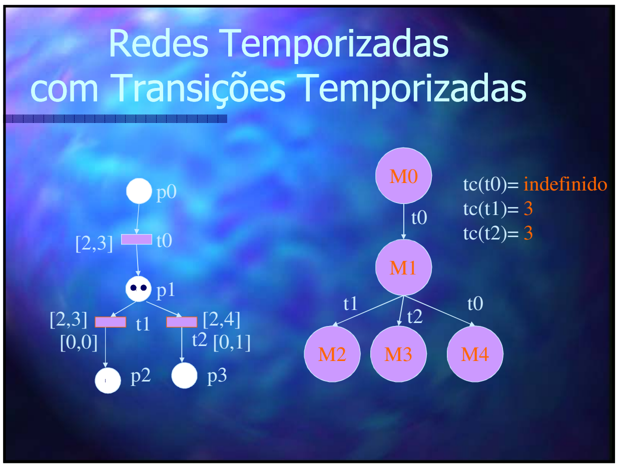

Redes Temporizadas
com Transições Temporizadas
p0
[2,3] t0
[2,3]
p1
[2,3] t1
[2,3]
[2,4]
t2 [2,4]
p2
p3
M0
t0
M1
tc(t0)= 0
tc(t1)= 0
tc(t2)= 0


Redes Temporizadas
com Transições Temporizadas
p0
[2,3] t0
[1,2]
p1
[2,3] t1
[1,2]
[2,4]
t2 [1,3]
p2
p3
M0
t0
M1
tc(t0)= 1
tc(t1)= 1
tc(t2)= 1


Redes Temporizadas
com Transições Temporizadas
p0
[2,3] t0
[0,1]
p1
[2,3] t1
[0,1]
[2,4]
t2 [0,2]
p2
p3
M0
t0
M1
tc(t0)= 2
tc(t1)= 2
tc(t2)= 2


Redes Temporizadas
com Transições Temporizadas
p0
[2,3] t0
[0,0]
p1
[2,3] t1
[2,4]
t2
p2
p3
M0
t0
M1
t1
M2
tc(t0)= 3
tc(t1)= indefinido
tc(t2)= indefinido


Redes Temporizadas
com Transições Temporizadas
p0
[2,3] t0
[0,0]
p1
[2,3] t1
[2,4]
t2
p2
p3
M0
t0
M1
t1
t2
M2
M3
tc(t0)= 3
tc(t1)= indefinido
tc(t2)= indefinido


Redes Temporizadas
com Transições Temporizadas
p0
[2,3] t0
p1
[2,3] t1
[0,0]
[2,4]
t2 [0,1]
p2
p3
M0
t0
M1
t1
t2
t0
M2
M3
M4
tc(t0)= indefinido
tc(t1)= 3
tc(t2)= 3

Grafo de Alcançabilidade - *Untimed Model* -

- Definição:Grafo de Alcançabilidade- seja uma rede marcada $N=(R,M_0)$. $RG(R, M_0)=(RS,ARCS)$ define o grafo de alcançabilidade (*Reachability Graph*), onde RS é o conjunto de vértice e representa o conjunto de alcançabilidade. $ARCS \subseteq RS \times T \times RS$ é uma relação representando os arcos.

Redes Temporizadas com Transições Temporizadas

- Definição: Grafo de Alcançabilidade Temporizado- seja uma rede marcada $TN=(R,M_0,I)$. $TRG(TN)=(S,\sum,ARCS,s_0)$ define o grafo de alcançabilidade temporal (*Time Reachability Graph*), onde S é o conjunto de vértice e representa o conjunto de alcançabilidade. $ARCS \subseteq S \times \sum \times S$ é uma relação representando os arcos. $s = (M,ET(M),TC)$ $(s \in S)$, onde $M: \aleph^{|P|}$ e $TC: ET(M) \rightarrow \aleph$ é uma função parcial que associa às transições um *timer clock,* que representa o tempo passado (desde a sua habilitação) até atingir-se M. $\sum \subseteq T \times \aleph$, onde $(t,\theta) \in \sum$ é um par ordenado representando o disparo de uma transição t no instante θ. $s_0= = (M_0,ET(M_0),TC)$, $TC(t) = 0, \forall t \in ET(M_0)$.

Redes Temporizadas com Transições Temporizadas

- Uma transição de estado $(s_i,(t, \theta),s_j) \in ARCS$ representa a alcançabilidade do estado s_j, a partir de s_i, pelo disparo de t no instante θ.

  $s_j =(M_j,ET(M_j),TC_j)$.

  - $M_j= M_i-W(p,t) + W(p,t), \forall p \in P$
  - $TCj(t_k)= \begin{cases} 0, & \text{se } t_k=t \\ 0, & \text{se } t_k \in ET(M_j) - ET(M_i) \\ Tc_i(t_k) + \theta & \text{caso contrário} \end{cases}$

Redes Temporizadas com Transições Temporizadas

- Time Petri Nets: $s_0=(M_0,ET_0(M_0),Tc_0)$

$Tc(t_0) = Tc(t_1) = Tc(t_2) = 0$

$DLB(t_0) = 2, DUB(t_0) = 4$

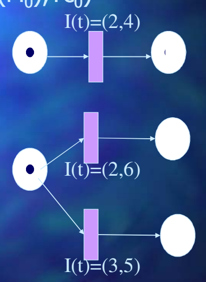
$DLB(t_1) = 2, DUB(t_1) = 6$

$DLB(t_2) = 3, DUB(t_2) = 5$

$FT(s')=\{t \mid t \in ET(M') \wedge DLB(t) \leq \min\{DUB(t_k), \forall t_k \in ET(M)\} \}$.

$FT(s_0)=\{t_0,t_1,t_2\}$

$FD_s(t)=[DLB(t), \min\{DUB(t_k), \forall t_k \in ET(M)\}]$



Redes Temporizadas com Transições Temporizadas

- Time Petri Nets: $s_0=(M_0,ET_0(M_0),Tc_0)$

$Tc(t_0) = Tc(t_1) = Tc(t_2) = 0$

$DLB(t_0) = 2, DUB(t_0) = 4$

$DLB(t_1) = 2, DUB(t_1) = 6$

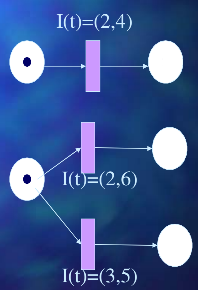
$DLB(t_2) = 3, DUB(t_2) = 5$

$FT(s_0)=\{t_0,t_1,t_2\}$

$FD_s(t_0)=[2,4]$

$FD_s(t_1)=[2,4]$

$FD_s(t2)=[3,4]$



Redes Temporizadas com Transições Temporizadas

- Time Petri Nets
- Definição: Grafo de Alcançabilidade Temporizado- seja uma rede marcada $TN=(R,M_0,I)$. $TRG(TN)=(S,ARCS)$ define o grafo de alcançabilidade temporal (*Time Reachability Graph*), onde S é o conjunto de vértice e representa o conjunto de alcançabilidade. $ARCS \subseteq S \times S$ é uma relação representando os arcos. $S = (M,TC)$, onde $M: \aleph^{P}$ e $TC: T \rightarrow \aleph$ é uma função parcial que associa as transições um *timer clock,* que representa o tempo passado (desde a sua habilitação) até atingir-se M.
- $S \subseteq RS$

Redes Temporizadas com Transições Temporizadas

- Timed Petri Nets (Ramchandani74)
- Definição: $TPN=(P,T,F, W,M_0, D)$, onde

P é o conjunto de lugares,

T o conjunto de transições,

$F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$ uma relação que representa os arcos

W – Valoração (peso dos arcos) - $W: F \rightarrow \aleph$

M_0- Marcação inicial - $M_0: P \rightarrow \aleph$

$D: T \rightarrow \Re^+ \cup \{0\}$ – Duração.

Redes Temporizadas com Transições Temporizadas

- Timed Petri Nets (Zuberek87)
- Definição: $TPN=(P,T,F, W,M_0,c,D)$, onde

$D: T \rightarrow \Re^+ \cup \{0\}$

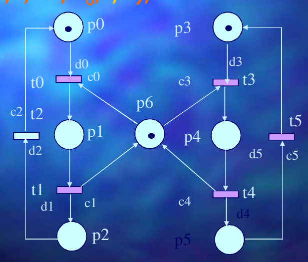
$c:T \rightarrow 0 \leq \Re \leq 1$ função de probabilidade de escolha, tal que:

$\sum_{\forall t \in Ti} c(t) = 1, \forall T_i \in Free(T)$, onde $Free(T)=\{T_1,\ldots, T_n\}$ conjunto de conjuntos de transições *free-choice.*

$T_i=\{t_j \mid \exists\, p \in P : p \in {}^\bullet t_j, \forall\, t_j \in T_i\}$

Redes Temporizadas com Transições Temporizadas

$TPN=(P,T,F, W,M_0,c,D)$,



Redes Temporizadas com Transições Temporizadas

- Timed Petri Nets
- Definição: Estado - Seja $TPN=(P,T,F, W,M_0,c,D)$ uma *Timed Petri net*. Um estado é definido por uma tupla $s=(m_1,m_2,r)$, onde
  - $M_1: P \rightarrow \aleph$ é a marcação
  - $M_2: T \rightarrow \aleph$ é uma função que mapeia cada transição em natural, onde este natural representa o número de vezes que aquela transição está sendo disparada naquele estado s. $s \in S$ (conjunto de estado).

Redes Temporizadas com Transições Temporizadas

- Timed Petri Nets
- Definição: Passo Simples Habilitado - Seja $TPN=(P,T,F, W,M_0,c,D)$ uma *Timed Petri net*. Um passo st_j^i habilitado no estado $s_i \in S$ é definido por: $st_j^i =\{t_k \mid M_1(p_l) \geq |p_l^\bullet \cap st_j|\}$.
- Definição: Passo Habilitado - Seja $TPN=(P,T,F, W,M_0,c,D)$ uma *Timed Petri net*. Um passo st_j^i habilitado no estado $s_i \in S$ é definido por: $st_j^i:T \rightarrow \aleph$ $M_1^i(p_l) \geq \sum_{\forall t \in pl^\bullet} st_j(t)$.
- Definição: Conjunto de Passos Habilitados - Seja $TPN=(P,T,F, W,M_0,c,D)$ uma *Timed Petri net e* st_j^i um passo habilitado no estado $s_i \in S$. $EST_i=\{st_j^i\}$ define o conjunto de passos habilitados no estado s_i.

Redes Temporizadas com Transições Temporizadas

- Timed Petri Nets
- Definição: Passo Máximo Habilitado - Seja $TPN=(P,T,F, W,M_0,c,D)$ uma *Timed Petri net e* $EST_i=\{st_j^i\}$ o conjunto de passos habilitados no estado s_i. Seja $T \supseteq stm^i$, se $\nexists$ $st_j^i \in EST_i$, $st_j^i \neq stm^i$, tal que $st_j^i \supseteq stm^i$, stm^i é denominado passo máximo habilitado.

Redes Temporizadas com Transições Temporizadas

- Timed Petri Nets (passo simples, *enabling memory*)
- Definição: Estado - Seja $TPN=(P,T,F,W,M_0,c,D)$ uma *Timed Petri net*. Um estado é definido por uma tupla $s=(m_1,m_2,r)$, onde

  $M_1: P \rightarrow \aleph$ é a marcação

  $M_2: T \rightarrow \{0,1\}$ é uma função que indica se uma transição está sendo disparada ou não.

  $$R: T \nrightarrow \begin{cases} \Re^+ \cup \{0\} & \text{se } M_2(t_i) = 1 \\ \text{indefinida} & \text{se } M_2(t_i) = 0 \end{cases}$$

  $R(t_i): \Re^+ \cup \{0\}$ é uma variável que associa a cada transição t_i um número real que representa o seu *remaining firing time* naquele estado s.

Redes Temporizadas com Transições Temporizadas

- Timed Petri Nets (passo simples, *enabling memory*)
- Definição: Estado - Seja $TPN=(P,T,F,W,M_0,c,D)$ uma *Timed Petri net*. Um estado é definido por uma tupla $s=(m_1,m_2,r)$, onde
- Definição: Tempo de Permanência – Seja um estado $s=(m_1,m_2,r)$, o tempo de permnência em s é:

  $$h(s)=\min_{\forall t\in T \wedge m2(t)>0} (r\,(t)$$

Redes Temporizadas com Transições Temporizadas

- Definição: Regra de Habilitação e Disparo – Passo Simples - Seja $TPN=(P,T,F,W,M_0,c,D)$ uma *Timed Petri net* e $s=(m_1,m_2,r)$ um estado em algum instante $\beta \in \Re^+ \cup \{0\}$.

  Um *step* $st_j^i=\{t_k\}$ está habilitado se

  $$\forall\, pi \in P,\ M_1(p_l) \geq |p_l^\bullet \cap st_j| \wedge M_2(t)=0,\ \forall\, t \in st_j$$

  Se um *step* st (máximo) está habilitado em um instante β (vamos tratar nos $\aleph$), dispara-se st em β.

  Em $\beta+1$, tem-se: $m'_1(pi) = m_1(pi) - |p_l^\bullet \cap st_j| + |{}^\bullet p_l \cap C_1| + |{}^\bullet p_l \cap C_2|\ \forall\, pi \in P$, onde

  $C_1=\{t \in T \mid t \in st_j \wedge D(t) =1\}$

  $C_2=\{t \in T \mid r\,(t) =1\}$

Redes Temporizadas com Transições Temporizadas

- Definição: Regra de Habilitação e Disparo – Passo Simples -

$$m'_2(t) = \begin{cases} m_2(t) & \text{se } r'(t)>0 \wedge t\notin st \\ m_2(t) +1 & \text{se } r'(t)>0 \wedge t \in st \\ m_2(t) - 1 & \text{se } r(t)\text{-}h(s)=0 \end{cases}$$

$$r'_j(t)= \begin{cases} r(t) - h(s) & \text{se } r(t)>0 \wedge t\notin st' \\ d(t) & \text{se } t \in st' \\ \text{indefinido} & m'_2(t)=0 \end{cases}$$

st'- passo máximo do próximo estado.

M' – marcação do próximo estado.

Redes Temporizadas com Transições Temporizadas

- Timed Petri Nets (passo, *enabling memory*)
- Definição: Estado - Seja $TPN=(P,T,F,W,M_0,c,D)$ uma *Timed Petri net*. Um estado é definido por uma tupla $s=(m_1,m_2,r)$, onde

  $M_1: P \rightarrow \aleph$ é a marcação

  $M_2: T \rightarrow \aleph$ é uma função que mapeia cada transição em natural, onde este natural representa o número de vezes que aquela transição está sendo disparada naquele estado s.

Redes Temporizadas com Transições Temporizadas

- Timed Petri Nets (passo, *enabling memory*)
- Definição: Estado - Seja $TPN=(P,T,F,W,M_0,c,D)$ uma *Timed Petri net*. Um estado é definido por uma tupla $s=(m_1,m_2,r)$, onde

  $R(t_i): (\Re^+ \cup \{0\})^{|k|}$ é um vetor que associa a cada disparo de t_i um número real que representa o *remaining firing time* de cada disparo de t_i naquele estado s. $k \in \aleph$ é o número de vezes que t_i está sendo disparada em s ($m_2(t_i)= k$). $r_j(t_i)$ é j-ésimo componente de $R(t_i)$

Redes Temporizadas com Transições Temporizadas

- Definição: Regra de Habilitação e Disparo – Passo - Seja $TPN=(P,T,F,W,M_0,c,D)$ uma *Timed Petri net* e $s=(m_1,m_2,r)$ um estado em algum instante $\beta \in \Re^+ \cup \{0\}$.
  Um *step* $st: T \rightarrow \aleph$ está habilitado se
  $$m_1(pi) \geq \sum_{t \in T} st(t).W(pi,t), \ \forall\, pi \in P$$
  Se um *step* st está habilitado em um instante β (vamos tratar nos $\aleph$), dispara-se st em β.
  Em $\beta+1$, tem-se: $m'_1(pi) = m_1(pi) - \sum_{t \in C0} st(t).W(pi,t) + \sum_{t \in C1} st(t).W(t,pi) + \sum_{t \in C2} m_2(t).W(t,pi), \ \forall\, pi \in P$, onde
  $C_0=\{t \in T \mid st(t) > 0\}$
  $C_1=\{t \in T \mid st(t) > 0 \wedge D(t) =1\}$
  $C_2=\{t \in T \mid r_i(t) =1\},\ 0< i < K$

Redes Temporizadas com Transições Temporizadas

- Timed Petri Nets (passo, *enabling memory*)
- Definição: Estado - Seja $TPN=(P,T,F,W,M_0,c,D)$ uma *Timed Petri net*. Um estado é definido por uma tupla $s=(m_1,m_2,r)$, onde
- Definição: Tempo de Permanência – Seja um estado $s=(m_1,m_2,r)$, o $h : S \rightarrow \Re^+ \cup \{0\}$ é uma função que associa o *holding time* a cada estado $s_i=(m_1,m_2,r)$, onde $h(s_i)=\min_{t \in T \wedge m2(t)>0}(r_i(t)[1])$

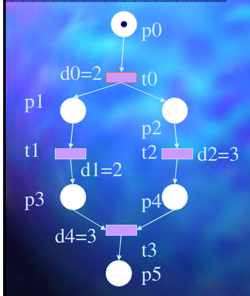
Redes Temporizadas com Transições Temporizadas

$st(t) \qquad \beta'=d(t)-1 \ \wedge\ r_j(t)>0$

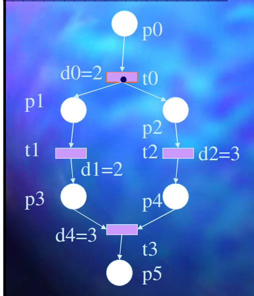
$m'_2(t) = m_2(t) - m_{2,\beta+1}(t)$, $\quad m_{2,\beta+1}(t)$ representa que "sairam" da transição no instante $\beta+1$

$r'_j(t)= r_j(t)-1,\ m_2(t_i) \neq 0 \vee t \in st$ (transições pertencentes ao *step* st ou as que já se encontravam "dentro" (m_2) das transições)

Redes Temporizadas com Transições Temporizadas

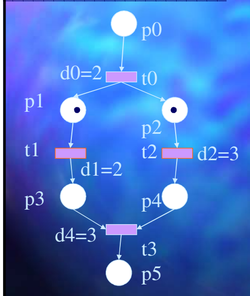


Redes Temporizadas com Transições Temporizadas



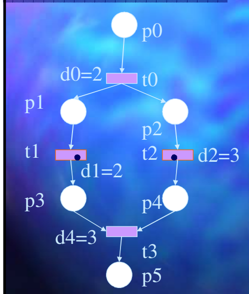
No instante $\beta=1$,
$r_1(t_0) = 1,\ m_2(t_0) = 1$

Redes Temporizadas com Transições Temporizadas



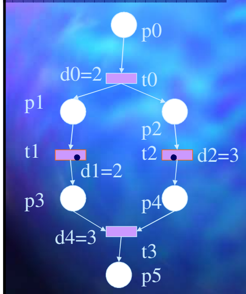
- No instante $\beta=1$,
  $r_1(t_0) = 1,\ m_2(t_0) = 1$
- No instante $\beta=2$,
  $r(t_1) = 2,\ m_2(t_1) = 1$
  $r(t_1) = 3,\ m_2(t_1) = 1$

Redes Temporizadas com Transições Temporizadas



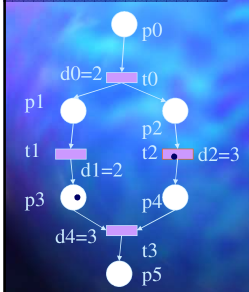
- No instante $\beta=1$,
  $r_1(t_0) = 1,\ m_2(t_0) = 1$
- No instante $\beta=2$,
  $r(t_1) = 2,\ m_2(t_1) = 1$
  $r(t_2) = 3,\ m_2(t_2) = 1$

Redes Temporizadas com Transições Temporizadas



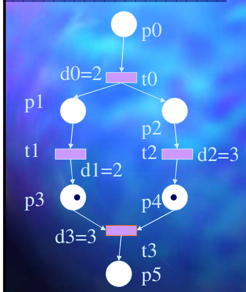
- No instante $\beta=1$,
  $r_1(t_0) = 1,\ m_2(t_0) = 1$
- No instante $\beta=2$,
  $r(t_1) = 2,\ m_2(t_1) = 1$
  $r(t_2) = 3,\ m_2(t_2) = 1$
- No instante $\beta=3$,
  $r(t_1) = 1,\ m_2(t_1) = 1$
  $r(t_2) = 2,\ m_2(t_2) = 1$

Redes Temporizadas com Transições Temporizadas



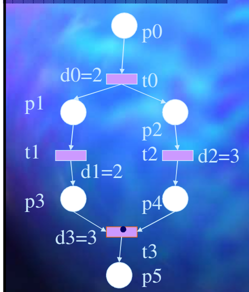
- No instante $\beta=1$,
  $r_1(t_0) = 1,\ m_2(t_0) = 1$
- No instante $\beta=2$,
  $r(t_1) = 2,\ m_2(t_1) = 1$
  $r(t_2) = 3,\ m_2(t_2) = 1$
- No instante $\beta=3$,
  $r(t_1) = 1,\ m_2(t_1) = 1$
  $r(t_2) = 2,\ m_2(t_2) = 1$
- No instante $\beta=4$,
  $r(t_2) = 1,\ m_2(t_2) = 1$

Redes Temporizadas com Transições Temporizadas



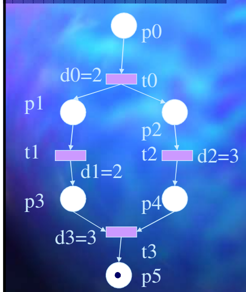
- No instante $\beta=1$,
  $r_1(t_0) = 1,\ m_2(t_0) = 1$
- No instante $\beta=2$,
  $r(t_1) = 2,\ m_2(t_1) = 1$
  $r(t_2) = 3,\ m_2(t_2) = 1$
- No instante $\beta=3$,
  $r(t_1) = 1,\ m_2(t_1) = 1$
  $r(t_2) = 2,\ m_2(t_2) = 1$
- No instante $\beta=4$,
  $r(t_2) = 1,\ m_2(t_2) = 1$
- No instante $\beta=5$,
  $r(t_3) = 3,\ m_2(t_3) = 1$

Redes Temporizadas com Transições Temporizadas

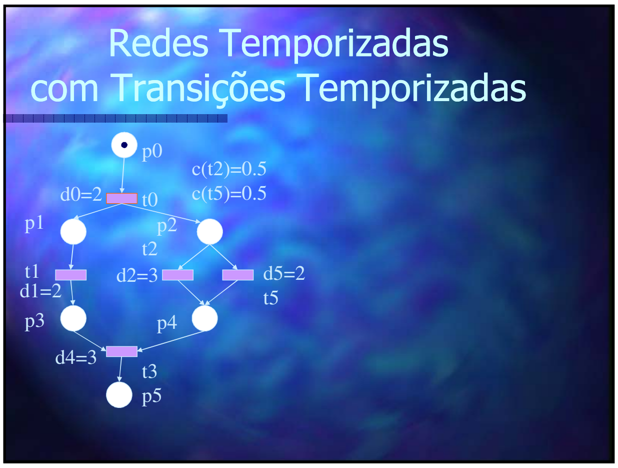


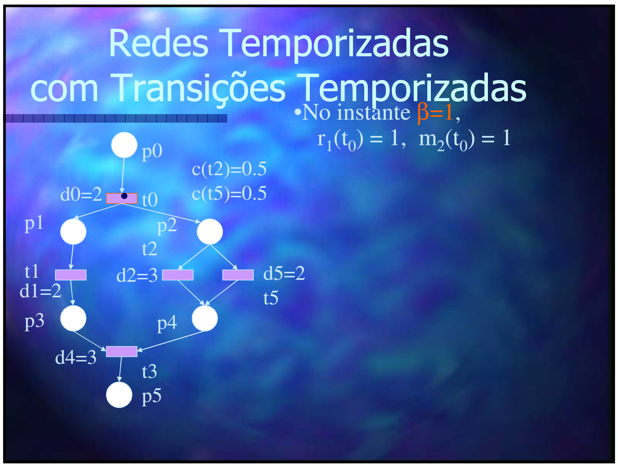
- No instante $\beta=1$,
  $r_1(t_0) = 1,\ m_2(t_0) = 1$
- No instante $\beta=2$,
  $r(t_1) = 2,\ m_2(t_1) = 1$
  $r(t_2) = 3,\ m_2(t_2) = 1$
- No instante $\beta=3$,
  $r(t_1) = 1,\ m_2(t_1) = 1$
  $r(t_2) = 2,\ m_2(t_2) = 1$
- No instante $\beta=4$,
  $r(t_2) = 1,\ m_2(t_2) = 1$
- No instante $\beta=5$,
  $r(t_3) = 3,\ m_2(t_3) = 1$

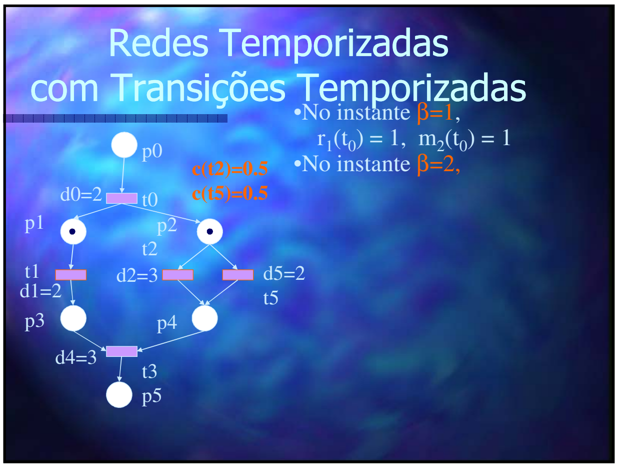
Redes Temporizadas com Transições Temporizadas

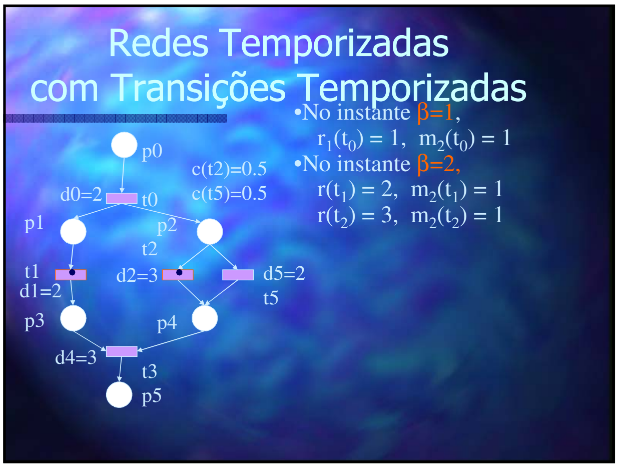


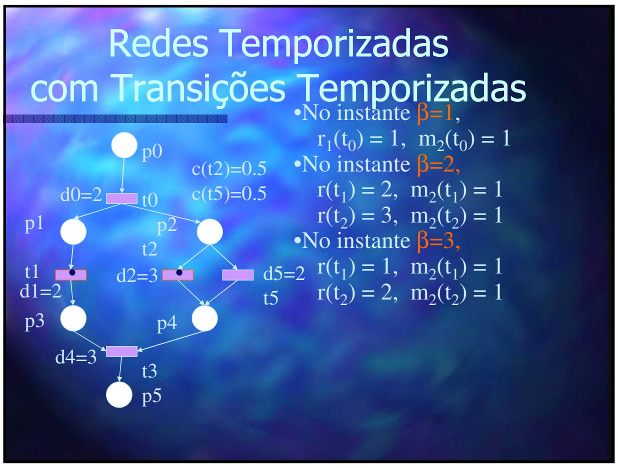
- No instante $\beta=1$,
  $r_1(t_0) = 1,\ m_2(t_0) = 1$
- No instante $\beta=2$,
  $r(t_1) = 2,\ m_2(t_1) = 1$
  $r(t_2) = 3,\ m_2(t_2) = 1$
- No instante $\beta=3$,
  $r(t_1) = 1,\ m_2(t_1) = 1$
  $r(t_2) = 2,\ m_2(t_2) = 1$
- No instante $\beta=4$,
  $r(t_2) = 1,\ m_2(t_2) = 1$
- No instante $\beta=5$,
  $r(t_3) = 3,\ m_2(t_3) = 1$
- No instante $\beta=8$,
  $m_1(p_5) = 1$

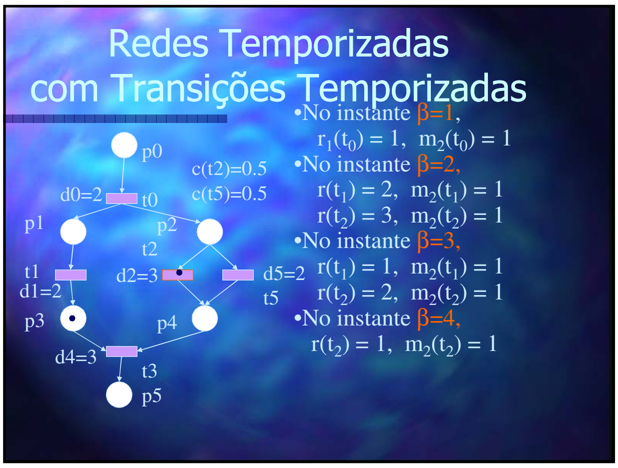

Redes Temporizadas
com Transições Temporizadas
p0
c(t2)=0.5
c(t5)=0.5
d0=2
t0
p1
p2
t2
t1
d1=2
d2=3
d5=2
t5
p3
p4
d4=3
t3
p5


Redes Temporizadas
com Transições Temporizadas
•No instante β=1,
$r_1(t_0) = 1,\ m_2(t_0) = 1$
p0
c(t2)=0.5
c(t5)=0.5
d0=2
t0
p1
p2
t2
t1
d1=2
d2=3
d5=2
t5
p3
p4
d4=3
t3
p5

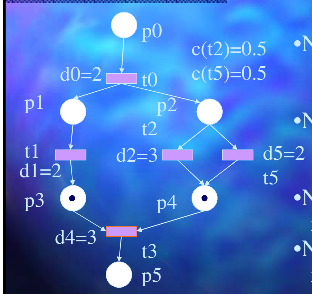

Redes Temporizadas
com Transições Temporizadas
•No instante β=1,
$r_1(t_0) = 1,\ m_2(t_0) = 1$
•No instante β=2,
p0
c(t2)=0.5
c(t5)=0.5
d0=2
t0
p1
p2
t2
t1
d1=2
d2=3
d5=2
t5
p3
p4
d4=3
t3
p5


Redes Temporizadas
com Transições Temporizadas
•No instante β=1,
$r_1(t_0) = 1,\ m_2(t_0) = 1$
•No instante β=2,
$r(t_1) = 2,\ m_2(t_1) = 1$
$r(t_2) = 3,\ m_2(t_2) = 1$
p0
c(t2)=0.5
c(t5)=0.5
d0=2
t0
p1
p2
t2
t1
d1=2
d2=3
d5=2
t5
p3
p4
d4=3
t3
p5


Redes Temporizadas
com Transições Temporizadas
•No instante β=1,
$r_1(t_0) = 1,\ m_2(t_0) = 1$
•No instante β=2,
$r(t_1) = 2,\ m_2(t_1) = 1$
$r(t_2) = 3,\ m_2(t_2) = 1$
•No instante β=3,
$r(t_1) = 1,\ m_2(t_1) = 1$
$r(t_2) = 2,\ m_2(t_2) = 1$
p0
c(t2)=0.5
c(t5)=0.5
d0=2
t0
p1
p2
t2
t1
d1=2
d2=3
d5=2
t5
p3
p4
d4=3
t3
p5

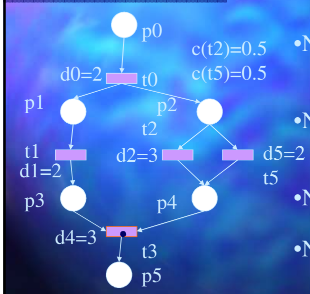

Redes Temporizadas
com Transições Temporizadas
•No instante β=1,
$r_1(t_0) = 1,\ m_2(t_0) = 1$
•No instante β=2,
$r(t_1) = 2,\ m_2(t_1) = 1$
$r(t_2) = 3,\ m_2(t_2) = 1$
•No instante β=3,
$r(t_1) = 1,\ m_2(t_1) = 1$
$r(t_2) = 2,\ m_2(t_2) = 1$
•No instante β=4,
$r(t_2) = 1,\ m_2(t_2) = 1$
p0
c(t2)=0.5
c(t5)=0.5
d0=2
t0
p1
p2
t2
t1
d1=2
d2=3
d5=2
t5
p3
p4
d4=3
t3
p5

Redes Temporizadas com Transições Temporizadas



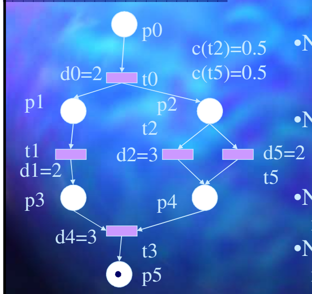
- No instante $\beta=1$, $r_1(t_0) = 1,\ m_2(t_0) = 1$
- No instante $\beta=2$, $r(t_1) = 2,\ m_2(t_1) = 1$; $r(t_2) = 3,\ m_2(t_2) = 1$
- No instante $\beta=3$, $r(t_1) = 1,\ m_2(t_1) = 1$; $r(t_2) = 2,\ m_2(t_2) = 1$
- No instante $\beta=4$, $r(t_2) = 1,\ m_2(t_2) = 1$
- No instante $\beta=5$, $r(t_3) = 3,\ m_2(t_3) = 1$

Redes Temporizadas com Transições Temporizadas

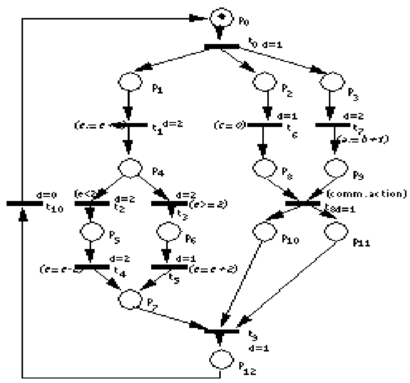


- No instante $\beta=1$, $r_1(t_0) = 1,\ m_2(t_0) = 1$
- No instante $\beta=2$, $r(t_1) = 2,\ m_2(t_1) = 1$; $r(t_2) = 3,\ m_2(t_2) = 1$
- No instante $\beta=3$, $r(t_1) = 1,\ m_2(t_1) = 1$; $r(t_2) = 2,\ m_2(t_2) = 1$
- No instante $\beta=4$, $r(t_2) = 1,\ m_2(t_2) = 1$
- No instante $\beta=5$, $r(t_3) = 3,\ m_2(t_3) = 1$

Redes Temporizadas com Transições Temporizadas



- No instante $\beta=1$, $r_1(t_0) = 1,\ m_2(t_0) = 1$
- No instante $\beta=2$, $r(t_1) = 2,\ m_2(t_1) = 1$; $r(t_2) = 3,\ m_2(t_2) = 1$
- No instante $\beta=3$, $r(t_1) = 1,\ m_2(t_1) = 1$; $r(t_2) = 2,\ m_2(t_2) = 1$
- No instante $\beta=4$, $r(t_2) = 1,\ m_2(t_2) = 1$
- No instante $\beta=5$, $r(t_3) = 3,\ m_2(t_3) = 1$
- No instante $\beta=8$, $m_1(p_5) = 1$



Redes Temporizadas com Transições Temporizadas

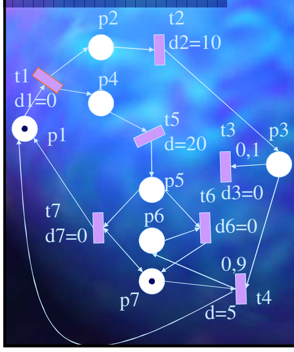
- Timed Petri Nets
- Definição: Grafo de Alcançabilidade Temporizado- seja uma rede marcada $TPN=(P,T,F, W,M_0,c,D)$. $TRG(TPN)=(S,A,h,q)$ define o grafo de estados temporal (*Timed State Graph*), onde S é o conjunto de vértice e representa o conjunto de estados. $A \subseteq S \times S$ é uma relação representando arcos dirigidos. $h : S \rightarrow \Re^+ \cup \{0\}$ é uma função que associa o *holding time* a cada estado $s_i=(m_1,m_2,r)$, onde $h(s_i)=\min_{t\in T \wedge m2(t)>0} (r_i(t)[1])$

Redes Temporizadas com Transições Temporizadas

- Timed Petri Nets
- Definição: Grafo de Alcançabilidade Temporizado- seja uma rede marcada $TPN=(P,T,F, W,M_0,c,D)$. $TRG(TPN)=(S,A,h,q)$

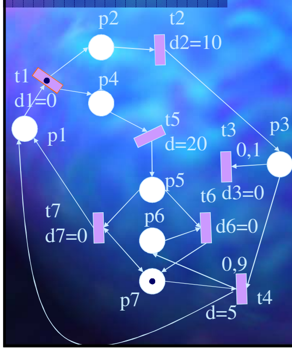
e $q : A \rightarrow [0,1]$ é uma função que associa uma probabilidade aos arcos do grafo.

Redes Temporizadas com Transições Temporizadas



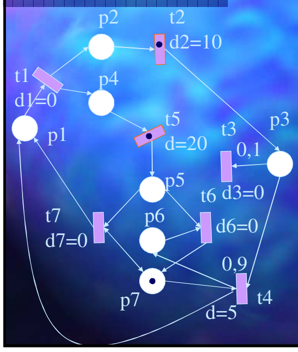
s_i	M_1	M_2	$h(s_i)$	M'_2	s_j	q
1	p=0	t1=1	0	t2=t5=1	2	1
2	p=0	t2=t5=1	10	t4=1	3	0,9
				t3=1	4	0,1
3	p=0	t4=t5=1	5	t1=1	5	1
4	p=0	t3=t5=1	0	t=0	6	1
5	p6=1	t1=t5=1	0	t2=t5=1	7	1
6	p=0	t5=1	10	t7=1	8	1
7	p6=1	t2=1,t5=2	5	t6=1	9	1
8	p=0	t7=1	0	t1=1	1	1
9	p=0	t2=t5= t6=1	0	t=0	10	1
10	p=0	t2=t5=1	5	t4=1	3	0,9
				t3=1	4	0,1

Redes Temporizadas com Transições Temporizadas



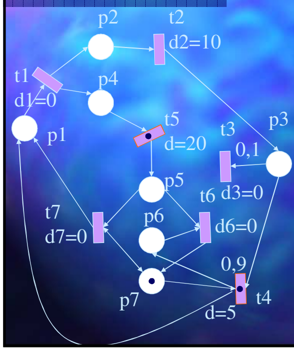
s_i	M_1	M_2	$h(s_i)$	M'_2	s_j	q
1	p=0	t1=1	0	t2=t5=1	2	1
2	p=0	t2=t5=1	10	t4=1	3	0,9
				t3=1	4	0,1
3	p=0	t4=t5=1	5	t1=1	5	1
4	p=0	t3=t5=1	0	t=0	6	1
5	p6=1	t1=t5=1	0	t2=t5=1	7	1
6	p=0	t5=1	10	t7=1	8	1
7	p6=1	t2=1,t5=2	5	t6=1	9	1
8	p=0	t7=1	0	t1=1	1	1
9	p=0	t2=t5= t6=1	0	t=0	10	1
10	p=0	t2=t5=1	5	t4=1	3	0,9
				t3=1	4	0,1

Redes Temporizadas com Transições Temporizadas



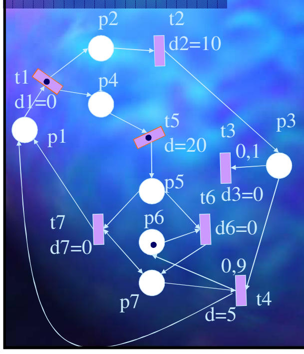
s_i	M_1	M_2	$h(s_i)$	M'_2	s_j	q
1	p=0	t1=1	0	t2=t5=1	2	1
2	p=0	t2=t5=1	10	t4=1	3	0,9
				t3=1	4	0,1
3	p=0	t4=t5=1	5	t1=1	5	1
4	p=0	t3=t5=1	0	t=0	6	1
5	p6=1	t1=t5=1	0	t2=t5=1	7	1
6	p=0	t5=1	10	t7=1	8	
7	p6=1	t2=1,t5=2	5	t6=1	9	
8	p=0	t7=1	0	t1=1	1	1
9	p=0	t2=t5= t6=1	0	t=0	10	1
10	p=0	t2=t5=1	5	t4=1	3	0,9
				t3=1	4	0,1

Redes Temporizadas com Transições Temporizadas



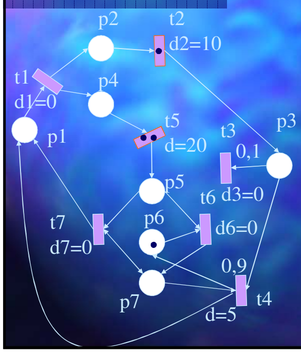
s_i	M_1	M_2	$h(s_i)$	M'_2	s_j
1	p=0	t1=1	0	t2=t5=1	2
2	p=0	t2=t5=1	10	t4=1	3 0,9
				t3=1	4 0,1
3	p=0	t4=t5=1	5	t1=1	5
4	p=0	t3=t5=1	0	t=0	6
5	p6=1	t1=t5=1	0	t2=t5=1	7
6	p=0	t5=1	10	t7=1	8
7	p6=1	t2=1,t5=2	5	t6=1	9
8	p=0	t7=1	0	t1=1	1
9	p=0	t2=t5= t6=1	0	t=0	10
10	p=0	t2=t5=1	5	t4=1	3 0,
				t3=1	4 0

Redes Temporizadas com Transições Temporizadas



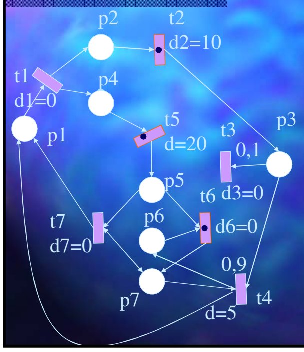
s_i	M_1	M_2	$h(s_i)$	M'_2	s_j
1	p=0	t1=1	0	t2=t5=1	2
2	p=0	t2=t5=1	10	t4=1	3
				t3=1	4 0,1
3	p=0	t4=t5=1	5	t1=1	5
4	p=0	t3=t5=1	0	t=0	6
5	p6=1	t1=t5=1	0	t2=t5=1	7
6	p=0	t5=1	10	t7=1	8
7	p6=1	t2=1,t5=2	5	t6=1	9
8	p=0	t7=1	0	t1=1	1
9	p=0	t2=t5= t6=1	0	t=0	10
10	p=0	t2=t5=1	5	t4=1	3
				t3=1	4 0

Redes Temporizadas com Transições Temporizadas



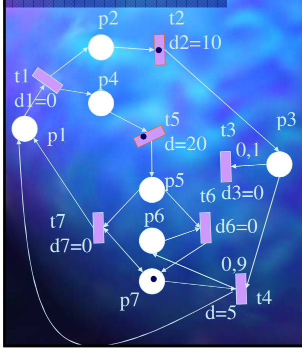
s_i	M_1	M_2	$h(s_i)$	M'_2	s_j
1	p=0	t1=1	0	t2=t5=1	2
2	p=0	t2=t5=1	10	t4=1	3 0,9
				t3=1	4 0,1
3	p=0	t4=t5=1	5	t1=1	5
4	p=0	t3=t5=1	0	t=0	6
5	p6=1	t1=t5=1	0	t2=t5=1	7
6	p=0	t5=1	10	t7=1	8
7	p6=1	t2=1,t5=2	5	t6=1	9
8	p=0	t7=1	0	t1=1	1
9	p=0	t2=t5= t6=1	0	t=0	10
10	p=0	t2=t5=1	5	t4=1	3 0,
				t3=1	4 0

Redes Temporizadas com Transições Temporizadas



s_i	M_1	M_2	$h(s_i)$	M'_2	s_j	q
1	p=0	t1=1	0	t2=t5=1	2	
2	p=0	t2=t5=1	10	t4=1	3	0,
				t3=1	4	0,1
3	p=0	t4=t5=1	5	t1=1	5	
4	p=0	t3=t5=1	0	t=0	6	
5	p6=1	t1=t5=1	0	t2=t5=1	7	
6	p=0	t5=1	10	t7=1	8	
7	p6=1	t2=1,t5=2	5	t6=1	9	1
8	p=0	t7=1	0	t1=1	1	1
9	p=0	t2=t5= t6=1	0	t=0	10	1
10	p=0	t2=t5=1	5	t4=1	3	0,
				t3=1	4	0,1

Redes Temporizadas com Transições Temporizadas

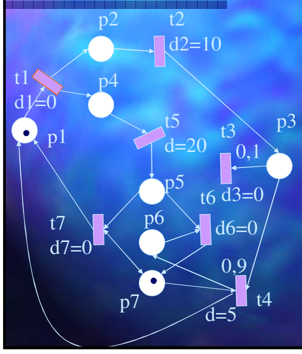


s_i	M_1	M_2	$h(s_i)$	M'_2	s_j	q
1	p=0	t1=1	0	t2=t5=1	2	1
2	p=0	t2=t5=1	10	t4=1	3	0,9
				t3=1	4	0,1
3	p=0	t4=t5=1	5	t1=1	5	1
4	p=0	t3=t5=1	0	t=0	6	1
5	p6=1	t1=t5=1	0	t2=t5=1	7	1
6	p=0	t5=1	10	t7=1	8	
7	p6=1	t2=1,t5=2	5	t6=1	9	
8	p=0	t7=1	0	t1=1	1	
9	p=0	t2=t5= t6=1	0	t=0	10	1
10	p=0	t2=t5=1	5	t4=1	3	0,
				t3=1	4	0

Redes Temporizadas com Transições Temporizadas

- Tempo de Execução
  - Análise do grafo de estados + Algorítmo de Procura de Caminhos
    - (Redes Genéricas)
  - Métodos Estrutural
    - (sub-classes: grafo-marcado)

Redes Temporizadas com Transições Temporizadas



s_i	M_1	M_2	$h(s_i)$	M'_2	s_j	q
1	p=0	t1=1	0	t2=t5=1	2	1
2	p=0	t2=t5=1	10	t4=1	3	0,9
				t3=1	4	0,1
3	p=0	t4=t5=1	5	t1=1	5	1
4	p=0	t3=t5=1	0	t=0	6	1
5	p6=1	t1=t5=1	0	t2=t5=1	7	1

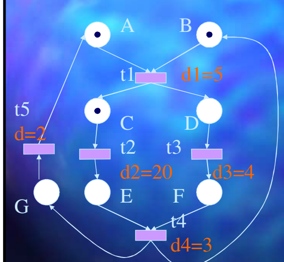
...

- D(s1,s5) = 0 + 10 + 5 + 0 = 15

Redes Temporizadas com Transições Temporizadas

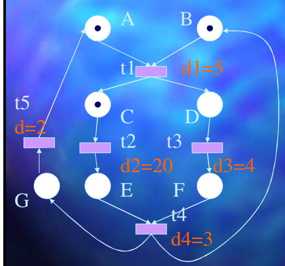
- Métodos Algébricos Aplicados aos Grafos Marcados
  - $C_m = \max_k \{D_k/N_k\}$ k=1,...,q
    - q é o número de circuitos
    - D_k é a soma dos tempos associados às transições do circuito k
    - N_k é o somatório de marcas no circuito k

Redes Temporizadas com Transições Temporizadas



- *P-minimum semiflows*:
  - SP1={A,C,E,G}
  - SP2={A,D,F,G}
  - SP3={B,C,E}
  - SP4={B,D,F}
- Circuito:
  - c1={t1,t2,t4,t5}
  - c2={t1,t3,t4,t5}
  - c3={t1,t2,t4}
  - c4={t1,t3,t4}

Redes Temporizadas com Transições Temporizadas



$C_m = \max_k \{D_k/N_k\}$ k=1,...,4

$C_1=(5+20+3+2)/2= 15$

$C_2=(5+4+3+2)/2= 14$

$C_3=(5+20+3)/2= 14$

$C_4=(5+4+3)/2= 12$

- $C_m = \max_k \{15,14,14,12\} = 15$

Redes Temporizadas com Transições Temporizadas

- Estendendo o Método Anterior para Redes *Free-Choice* sem Compartilhamento de Recursos
- Seja $N=(P,T,I,O,M_0,D)$ uma rede e $SN_i=(P^{SNi},T^{SNi},I^{SNi},O^{SNi},M_0^{SNi},D^{SNi})$ e uma rede $SN_i \subseteq N$ obtida pelos *p-minimum semiflows*. Seja $SN_k=(P^{SNk},T^{SNk},I^{SNk},O^{SNk},M_0^{SNk},D^{SNk})$ uma rede tal que $SN_k \subseteq SN_i$ onde T^{SNk} pertence a um único *t-minimum semiflows*.

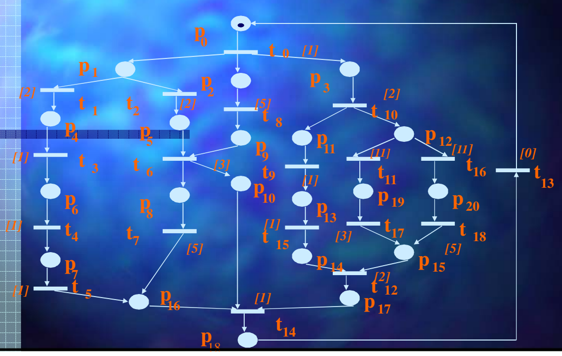
Redes Temporizadas com Transições Temporizadas

- Tempo do Caminho Crítico
  - $CT_m = \max_k \{D_k/N_k\}$ k=1,...,q
    - q é o número de sub-redes **SN_k**
    - D_k é a soma dos tempos associados às transições da sub-rede k.
    - N_k é o somatório de marcas no circuito k

Redes Temporizadas com Transições Temporizadas

- Tempo Mínimo
  - $MT_m = \max_k \{\min\{D_j/N_j\},D_i/N_i\}$ i=1,...,q. j=1,...,r
    - q é o número de sub-redes **SN_i** obtidas diretamente dos *p-minimum semiflows* e cujos T^{SNi} pertence a um único *t-minimum semiflows*.
    - r é o número de sub-redes **SN_j** obtidas dos *p-minimum semiflows* e por sua decomposição tal que T^{SNj} pertence a um único *t-minimum semiflows*.
    - D_k é a soma dos tempos associados às transições da sub-rede k.
    - N_k é o somatório de marcas no circuito k

Redes Temporizadas com Transições Temporizadas



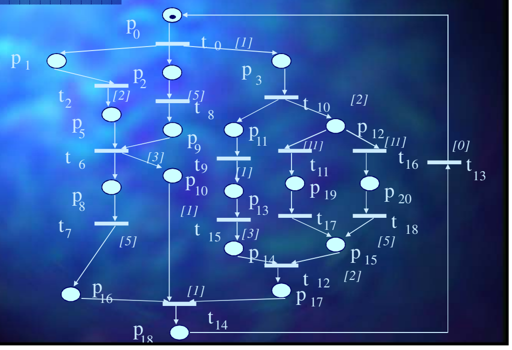
Redes Temporizadas com Transições Temporizadas

- *T-minimum semiflows*

$st_0= \{t_0 ,t_2 ,t_6 ,t_7 ,t_8 ,t_9 ,t_{10} ,t_{11} ,t_{12} ,t_{13} ,t_{14} ,t_{15} ,t_{17}\}$

$st_1 = \{t_0 ,t_2 ,t_6 ,t_7 ,t_8 ,t_9 ,t_{10} ,t_{11} ,t_{12} ,t_{13} ,t_{14} ,t_{16} ,t_{18}\}$

Redes Temporizadas com Transições Temporizadas



Redes Temporizadas com Transições Temporizadas

- *P-minimum semiflows*
  - $sp_1 = \{p_0, p_1, p_5, p_8, p_{16}, p_{18}\}$
  - $sp_2 = \{p_0, p_3, p_1, p_{15}, p_{17}, p_{18}, p_{19}, p_{20}\}$
  - $sp_3 = \{p_0, p_1, p_5, p_{10}, p_{18}\}$
  - $sp_4 = \{p_0, p_2, p_9, p_{10}, p_{18}\}$
  - $sp_5 = \{p_0, p_2, p_8, p_9, p_{16}, p_{18}\}$
  - $sp = \{p_0, p_3, p_{11}, p_{13}, p_{14}, p_{17}, p_{18}\}$

Redes Temporizadas com Transições Temporizadas

- *Transition paths*
  - $sn_1 = \{t_0, t_2, t_6, t_7, t_{13}, t_{14}\}$
  - $sn_2 = \{t_0, t_{10}, t_{11}, t_{12}, t_{13}, t_{14}, t_{16}, t_{17}, t_{18}\}$
  - $sn_3 = \{t_0, t_2, t_6, t_{13}, t_{14}\}$
  - $sn_4 = \{t_0, t_6, t_8, t_{13}, t_{14}\}$
  - $sn_5 = \{t_0, t_6, t_7, t_8, t_{13}, t_{14}\}$
  - $sn_6 = \{t_0, t_9, t_{10}, t_{12}, t_{13}, t_{14}, t_{15}\}$

Redes Temporizadas com Transições Temporizadas

- Decomposição dos Caminhos
  - $sn_2 = \{t_0, t_{10}, t_{11}, t_{12}, t_{13}, t_{14}, t_{16}, t_{17}, t_{18}\}$
    - $sn_{21} = \{t_0, t_{10}, t_{11}, t_{12}, t_{13}, t_{14}, t_{17}\}$
    - $sn_{22} = \{t_0, t_{10}, t_{12}, t_{13}, t_{14}, t_{16}, t_{18}\}$

Redes Temporizadas com Transições Temporizadas

- Tempo do Caminho Crítico
  - $CT(N) = \max\{T(sn_1), T(sn_{21}), T(sn_{22}), T(sn_3), T(sn_4), T(sn_5), T(sn_6)\} = 22$
- Tempo Mínimo
  - $MT(N) = \max\{T(sn_1), \min\{T(sn_{21}), T(sn_{22})\}, T(sn_3), T(sn_4), T(sn_5), T(sn_6)\} = 20$

Redes Temporizadas com Transições Temporizadas

- Redução de Transição em Seqüência

Seja uma rede $N=(P,T,I,O,M_0,D)$, $p_i \in P$ um lugar, onde $I(p_i)=[t_j]$ $O(p_i)=[t_k]$. N pode ser transformada em $N'=(P',T',I',O',M'_0,D')$ pela fusão de t_j e t_k e eliminação de p_i. A transição $t_{j/k} \in T'$ representa as transições fundidas tal que $I(t_{j/k}) = I(t_j)$ e $O(t_{j/k}) = O(t_k)$ e $d_{j/k} = d_j + d_k$

Redes Temporizadas com Transições Temporizadas

- Redução de Transição em Seqüência

$d_{j/k}= d_j + d_k$

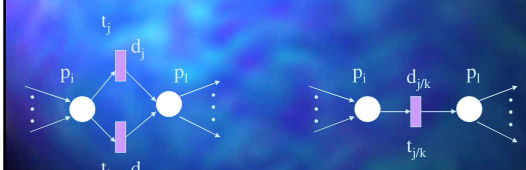
Redes Temporizadas com Transições Temporizadas

- Redução de Transição de um Escolha

Seja uma rede $N=(P,T,I,O,M_0,D)$, p_i, $p_l \in P$ lugares, onde $O(p_i)=[t_j, t_k]$ e $I(p_l)=[t_j,t_k]$. N pode ser transformada em $N'=(P',T',I',O',M'_0,D')$ pela fusão de t_j e t_k. A transição $t_{j/k} \in T'$ representa as transições fundidas tal que $I(t_{j/k}) = I(t_j)$ e $O(t_{j/k}) = O(t_k)$ e o tempo mínimo é $d_{j/k}= \min\{d_j, d_k\}$ e o tempo máximo é $d_{j/k}= \max\{d_j, d_k\}$

Redes Temporizadas com Transições Temporizadas

- Redução de Transição de um Escolha



$d_{j/k}= \min\{d_j, d_k\}$
$d_{j/k}= \max\{d_j, d_k\}$

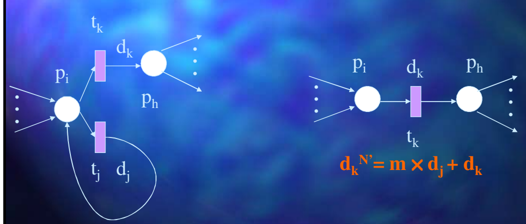
Redes Temporizadas com Transições Temporizadas

- Redução de Laço

Seja uma rede $N=(P,T,I,O,M_0,D)$, p_i, $p_h \in P$ lugares, onde $O(p_i)=[t_j, t_k]$ e $O(t_j)=[p_i]$, $I(p_h)=[t_k]$. N pode ser transformada em $N'=(P',T',I',O',M'_0,D')$ pela eliminação de t_j. O tempo associado a transição $t_k \in T'$ é $d_k^{N'}= m \times d_j + d_k$.

Redes Temporizadas com Transições Temporizadas

- Redução de Laço



$d_k^{N'}= m \times d_j + d_k$

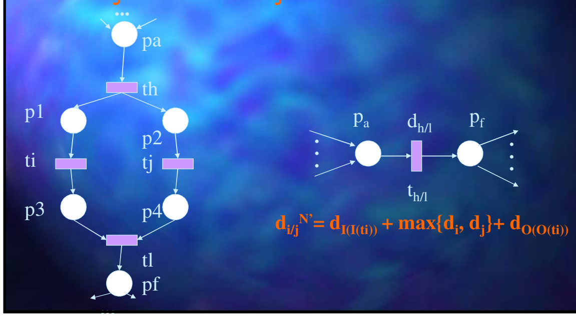
Redes Temporizadas com Transições Temporizadas

- Redução de Transições Paralelas

Seja uma rede $N=(P,T,I,O,M_0,D)$, t_i, t_j , t_h, $t_l \in T$ transições, onde $I(I(t_i))=I(I(t_j))$ e $O(O(t_i))=O(O(t_h))$. N pode ser transformada em $N'=(P',T',I',O',M'_0,D')$ pela eliminação da estrutura $SN=(P^{SN},T^{SN},I^{SN},O^{SN},M_0^{SN},D^{SN})$, onde $P^{SN}=\{I(t_i), I(t_j)), O(t_i), O(t_j)\}$, $T'=\{t_i, t_j, I(I(t_i))=t_h, O(O(t_i))=t_l\}$. $t_{h/l} \in T'$ representa a estrutura reduzida, tal que $I(t_{h/l})= I(I(I(t_i)))= I(I(I(t_j)))$, $O(O(O(t_i)))= O(O(O(t_j)))$ e $d_{i/j}^{N'}= d_{I(I(ti))} + \max\{d_i, d_j\}+ d_{O(O(ti))}$.

Redes Temporizadas com Transições Temporizadas

- Redução de Transições Paralelas



$d_{i/j}^{N'} = d_{I(I(ti))} + \max\{d_i, d_j\} + d_{O(O(ti))}$

Classificação da Técnicas de Avaliação de Desempenho

Modelagem para Análise de Desempenho

- Algumas Medidas
  - Tempo de Manufatura
  - *Throughput*
  - Utilização
  - Capacidade
  - Confiabilidade

Redes Temporizadas Estocásticas

- Modelagem para Análise de Desempenho
  - Modelos para Simulação
  - Modelos Analíticos
    - Cadeias de Markov
    - Teoria das Filas
    - Redes de Petri Estocásticas

Redes Temporizadas Estocásticas

- Variáveis Aleatórias é uma função que confere um número real a cada resultado (do espaço amostral) de um experimento aleatório.
- Variáveis aleatórias contínuas assumem quaisquer valores no intervalo [a,b], onde $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$
- Variáveis aleatórias discretas assumem apenas valores discretos.

Redes Temporizadas Estocásticas

- Proriedade Markoviana
  - Ausência de Memória
- Variáveis Aleatórias com Propriedade Markoviana
  - Variável Aleatória Geométrica
  - Variável Aleatória Exponencial

Variáveis Aleatórias Resumo

- Discreta
  - Bernoulli
    - Considere um experimento aleatório com dois resultados possíveis ($X=0, X=1$).
    - pmf(*probability mass function*) de X é dada por: $P(X=0) = 1-p$ e $P(X=1) = p$, $0 \le p \le 1$

Variáveis Aleatórias Resumo

- Discreta
  - Binomial
    - Considere um experimento aleatório independentes com dois resultados possíveis (0 e 1 por exemplo) realizados n vezes. A variável aleatória é o número de vezes que se tem resultado 1.
    - pmf de X é dada por: $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ $k=0,1,\ldots,n$.

Variáveis Aleatórias Resumo

- Discreta
  - Geométrica
    - Considere um experimento aleatório independentes com dois resultados possíveis (0 e 1 por exemplo) realizados n vezes. A variável aleatória é o número de vezes que se realiza o experimento para se ter o primeiro resultado 1.
    - pmf de X é dada por: $P(X=k) = p\,(1-p)^{n-k}$ $k=0,1,\ldots$

Variáveis Aleatórias Resumo

- Discreta
  - Valor Médio ou Valor Esperado
    - $\bar{X} = E[X] = \Sigma_{\forall k}\, k \,.\, P(X=k)$
  - Uma função de uma variável aleatória (f(X)) é uma variável aleatória (Y) com Valor Esperado
    - $E[f(X)] = \Sigma_{\forall k}\, f(k) \,.\, P(X=k)$

Variáveis Aleatórias Resumo

- Discreta
  - n-ésimo momento de uma variável aleatória X é o valor esperado da enésima potência X
    - $\overline{X^n} = E[X^n] = \Sigma_{\forall k}\, k^n \,.\, P(X=k)$
  - n-ésimo momento central de uma variável aleatória X é o valor esperado da enésima potência da diferença entre X e o valor esperado de X ($E(X) = \bar{X}$)
    - $\overline{(X-\bar{X})^n} = \Sigma_{\forall k}\, (k-\bar{X})^n \,.\, P(X=k)$

Variáveis Aleatórias Resumo

- Discreta
  - O primeiro momento central é 0
  - O segundo momento central (variância)
    - $\sigma^2 = \overline{(X-\bar{X})^2} = \Sigma_{\forall k}\, (k-\bar{X})^2 \,.\, P(X=k)$
  - O coeficiente de variação e a normalização do desvio padrão
    - $c_X = \sigma / \bar{X}$

Variáveis Aleatórias Resumo

- Discreta
  - Bernoulli
    - Parâmentros: p; Valor Esperado: p
    - Variância: p(1-p); Coeficiente de variação: (1-p)/p
  - Binomial
    - Parâmentros: n,p; Valor Esperado: np
    - Variância: np(1-p); Coeficiente de variação: (1-p)/np

Variáveis Aleatórias Resumo

- Discreta
  - Geométrica
    - Parâmentros: p; Valor Esperado: 1/p
    - Variância: $(1-p)/p^2$; Coeficiente de variação: (1-p)

Variáveis Aleatórias Resumo

- Contínua
  - *Cumulative Distribution Function (CDF)*

  $F_X(x) = P(X \leq x)$
    - Se $x < y$ então: $F_X(x) < F_X(y)$
    - $P(x < X \leq y) = F_X(y) - F_X(x)$
  - *Probability density function* (pdf)
    - $f_X(x) = dF_X(x) \,/\, dx$
    - $f_X(x) \geq 0$
    - $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$

Variáveis Aleatórias Resumo

- Contínua
  - *Probability density function* (pdf)
    - $f_X(x) = dF_X(x) \,/\, dx$
    - $f_X(x) \geq 0$
    - $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$
    - $P(x1 \leq X \leq x2) = \int_{x1}^{x2} f_X(x)\,dx$
    - $P(X=x) = \int_{x}^{x} f_X(x)\,dx = 0$

Variáveis Aleatórias Resumo

- Contínua
  - Valor Médio ou Valor Esperado
    - $\bar{X} = E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \,.\, f_X(x)\,dx$
  - Uma função de uma variável aleatória (g(X)) é uma variável aleatória com Valor Esperado
    - $E[g(X)] = = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \,.\, f_X(x)\,dx$

Variáveis Aleatórias Resumo

- Contínua
  - n-ésimo momento
    - $\overline{X^n} = E[X^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \cdot f_X(x)\, dx$
  - n-ésimo momento central
    - $\overline{(X-\overline{X})^n} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\overline{X})^n \cdot f_X(x)\, dx$

Variáveis Aleatórias Resumo

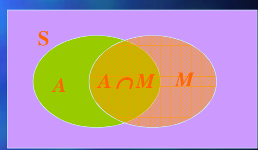
- Contínua
  - O segundo momento central (variância)
    - $\sigma^2 = \overline{(X-\overline{X})^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\overline{X})^2 \cdot f_X(x)\, dx$
  - O coeficiente de variação e a normalização do desvio padrão
    - $c_X = \sigma / \overline{X}$

Redes Temporizadas Estocásticas

- Proriedade Markoviana
  - Ausência de Memória
- Variáveis Aleatórias com Propriedade Markoviana
  - Variável Aleatória Geométrica
  - Variável Aleatória Exponencial

Probabilidade Condicional

- Seja *A* um evento arbitrário em um espaço amostral *S*. A probabilidade de que ocorra um evento *A* uma vez que *M* tenha ocorrido é denotado por $P(A/M)$ que é definido por:
- $P(A/M) = \dfrac{P(A \cap M)}{P(M)}$



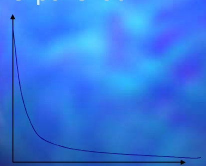
- Caso $M \subset A$ então $P(A/M)=1$
- Caso $A \subset M$ então
  $P(A/M) = \dfrac{P(A)}{P(M)}$

Distribuição Exponencial

Variável Aleatória Exponencial

- fdp exponencial

$f_X(t)$

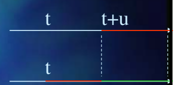


t

FD - Função de Distribuição

- $f_X(t) = \mu e^{-\mu t}$
- $FD(t) = 1 - e^{-\mu t}$
- Valor Esperado
  $E(X) = \dfrac{1}{\mu}$
- Propriedade:
  Não possui memória

Distribuição Exponencial



Variável Aleatória Exponencial

$\boxed{P\{X>t\} = e^{-\mu t}}$

- $P\{X>t+u \mid X > t\} = \dfrac{P\{X>t+u \wedge X>t\}}{P\{X>t\}}$ Probabilidade Condicional
- $P\{X>t+u \mid X > t\} = \dfrac{P\{X>t+u\}}{P\{X>t\}}$

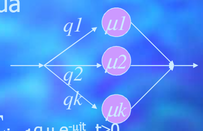
$P\{X>t+u \mid X > t\} = \dfrac{e^{-\mu(t+u)}}{e^{-\mu t}} = \boxed{e^{-\mu u} = P\{X>u\}}$

Variáveis Aleatórias Resumo

- Contínua
  - Exponencial
    - Parâmentros: μ; Valor Esperado: $1/\mu$
    - Variância: $1/\mu^2$;
    - Coeficiente de variação: 1

Variáveis Aleatórias Resumo

- Contínua



$F_X(x)=\sum_{j=1}^{k} q_j(1-e^{-\mu_j t})$, $t\geq 0$

$f_X(x)=\sum_{j=1}^{k} q_j\mu_j e^{-\mu_j t}$, $t\geq 0$

  - Hiperexponencial
    - Parâmentros:k, μ_j, q_j; Valor Esperado: $1/\mu$

    $\overline{X}=\sum_{j=1}^{k} q_j/\mu_j= 1/\mu$
    - Coeficiente de variação: $\mathrm{sqrt}(2\mu^2 \sum_{j=1}(q_j/\mu_j^2 - 1)) \geq 1$
    - Variância: $2 \sum_{j=1}(q_j/\mu_j^2 - 1/\mu^2)$

Variáveis Aleatórias Resumo

- Contínua
- Uma distribuição desconhecida de $\overline{X}$ e $c\geq 1$ pode ser aproximada por uma
  - Hiperexponencial
    - Parâmentros:k=2, μ_1, μ_2, q_1, q_2: Valor
    $\mu_1=1/\overline{X}$. $(1 - \mathrm{sqrt}(q_2/q_1 . (c^2 -1)/2))^{-1}$
    $\mu_2=1/\overline{X}$. $(1 + \mathrm{sqrt}(q_1/q_2 . (c^2 -1)/2))^{-1}$
    $q_1+q_2=1$, $q_1, q_2\geq 0$ $\mu_1, \mu_2>0$

Variáveis Aleatórias Resumo

- Contínua

$F_X(x)=1-e^{-k\mu t} \sum_{j=0}^{k-1} (k\mu t)^j/j!$, $t\geq 0$

$f_X(x)= [k\mu(k\mu t)^{k-1}]/(k-1)!$, $t\geq 0$

  - Erlang-k
    - Parâmentros:k, μ; Valor Esperado: $1/\mu$
    - Variância: $1/k\mu^2$
    - Coeficiente de variação: $1/\mathrm{sqrt}(k) \leq 1$

Variáveis Aleatórias Resumo

- Contínua
- Uma distribuição desconhecida de $\overline{X}$ e $c\leq 1$ pode ser aproximada por uma
  - Erlang-k
    - $k=[1/c^2]$
    - $\mu=1/(c^2k\overline{X})$

Variáveis Aleatórias Resumo

- Contínua
  - Hipo-exponencial é uma generalização da distribuição de Erlang quando admite-se fases com taxas diferentes.
  - Para uma variável aleatória com distribuição hipo-exponencial com duas fases $\mu_1 \neq \mu_2$, tem-se:
    - $F_X(x)=1- [\mu_2 /(\mu_2- \mu_1)e^{-k\mu_1 t}] + [\mu_1 /(\mu_2- \mu_1)e^{-k\mu_2 t}]$, $t\geq 0$
    - $f_X(x)= [(\mu_1 \mu_2)/(\mu_1 - \mu_2)] (e^{-\mu_2 t} - e^{-\mu_1 t})$, $t\geq 0$

Variáveis Aleatórias Resumo

- Contínua
  - Hipo-exponencial Parâmentros:k, μ; Valor Esperado: $1/\mu_1 + 1/\mu_2$
    - Variância: $1/\mu^2_1 + 1/\mu^2_2$
    - Coeficiente de variação:[sqrt(μ^2_1 +μ^2_2)/ ($\mu_1 + \mu_2$)]< 1

Variáveis Aleatórias Resumo

- Contínua
- Uma distribuição desconhecida de $\bar{X}$ com valor esperado $\bar{X}$ e $0.5 \leq c \leq 1$ pode ser aproximada por uma
  - Hipo-exponencial

    $\mu_1=(2/\bar{X})\ \{1+\text{sqrt}[1+2(c^2-1)]\}^{-1}$

    $\mu_2=(2/\bar{X})\ \{1-\text{sqrt}[1+2(c^2-1)]\}^{-1}$

Variáveis Aleatórias Resumo

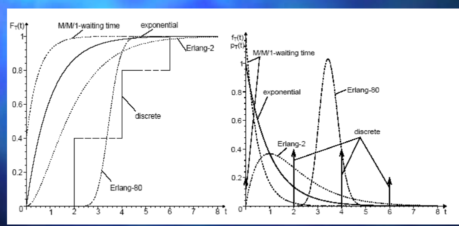
- Contínua
  - Para uma variável aleatória com distribuição hipo-exponencial com k fases e taxas $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ tem-se:

$f_X(x)= \sum_{j=1}^{k} a_i \mu_i e_1^{\lambda_i t}\ ,\quad t\geq 0$

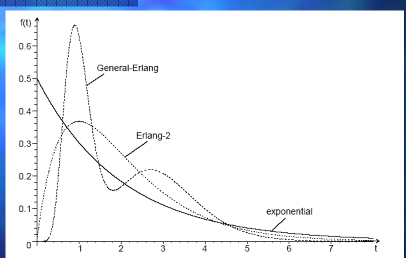
$a_i= \prod_{j=1, j\neq i}^{k}[\mu_j/(\mu_j-\mu_i)]\ ,\quad 1\leq i\leq k$

Valor Médio $= \sum_{j=1}^{k} 1/\mu_i$

Variáveis Aleatórias Resumo



Variáveis Aleatórias Resumo



Processos Estocásticos

- Processo Estocástico é definido por um conjunto de variáveis aleatórias,

$\{X(t) : t \in T\}$, onde $X(t)$ é uma variável aleatória para cada $t \in T$.

t é denominado parâmetro e cada valor de $X(t)$ são estados.

- Processo Estocástico Markoviano é um processo estocástico onde as variáveis aleatórias não dependem da história passada.
- Tipos de Processos Estocásticos
  - Processos de espaço de estados e tempo discretos (*Discret Time Markov Chain* - DTMC)
  - Processos de espaço de estados contínuo e tempo discreto
  - Processos de espaço de estados discreto e tempo contínuo (*Continuos Time Markov Chain* - CTMC)
  - Processos de espaço de estados e tempo contínuos

Processos Estocásticos

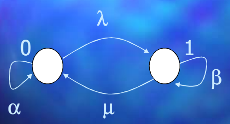
- Classificação de Estados:
  - Estado Alcançavel (*reachable*): um estado s_j é um alcancável de um estado s_i se $p_{ij} > 0$.
  - Um sub-conjunto de estado S é definido com fechado (*closed*) se $\forall\ s_i \in S,\ \forall\ s_j \notin S\ p_{ij} = 0$.
  - Um estado é absorvente se ele é o único membro de conjunto fechado de estados S.
  - Um conjunto fechado de estado S é dito irredutível se $p_{ij} > 0\ \ \forall\ s_i, s_j \in S$ (todo estado s_j é alcançável de qualquer estado s_i).

Processos Estocásticos

- Processo Estocástico Markoviano é um processo estocástico onde as variáveis aleatórias não dependem da história passada.
- Observam-se dois aspectos associados a ausência de memória:
  1 Todo estado passado é irrelevante.
  2 O tempo que o processo passa em um estado é irrelevante.
- Processo Estocástico Semi-Markoviano é uma extensão de um processo Markoviano onde a restrição 2 é relaxada.

Discrete Time Markov Chain

- O comportamento de uma rede estocástica é representado por DTMC



Matriz de Propabilidades de Próximo Estados

$$P = \begin{vmatrix} \frac{\alpha}{\alpha+\lambda} & \frac{\lambda}{\alpha+\lambda} & 0 \\ \frac{\mu}{\beta+\mu} & \frac{\beta}{\beta+\mu} & 1 \end{vmatrix}$$

Discrete Time Markov Chain

- Soluções para *Steady-States*

$$P = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$A_1=(a_{11}\ a_{12}\ a_{13})$
$A_2=(a_{21}\ a_{22}\ a_{23})$
$A_3=(a_{31}\ a_{32}\ a_{33})$

a_{ij} - probabilidade $\qquad \sum_{si \in S} a_{ij}=1$

$\Pi\ .\ P = \Pi$, $\sum_{si \in S} \pi_i=1$, onde π_i fornece o número relativo de visitas ao estado s_i

Discrete Time Markov Chain

- Soluções para Transiente

$\Pi(1)= \Pi(0)\ P$,
$\Pi(2)= \Pi(1)\ P = \Pi(0)\ P^2$

$\Pi(k)= \Pi(0)\ P^n$, $k=1,2,\ldots$

Continuos Time Markov Chain

- Equação de Chapman-Kolmogorov

Considere uma CTMC (não-homogênea) $\{X(t): t\geq 0\}$ com espaço de estado $\{0,1,2,\ldots\}$. Vamos usar i,j e k para denotar estados típicos e s,u e t para denotar parâmetro de tempo.

Para $0 \leq s \leq t$, considere $p_{ij}(s,t) = P\{X(t)=j \mid X(s)=i\}$. Pode ser representada na forma matricial por $H(s,t) = [\ p_{ij}(s,t)]$

A equação de Chapman-Kolmogorov

$$p_{ij}(s,t) = \sum_k p_{ik}(s,u)\ p_{kj}(u,t);\ 0 \leq s \leq u \leq t$$

Na forma matricial, temos:

$$H(s,t) = H(s,u)\ H(u,t);\ 0 \leq s \leq u \leq t$$

Continuos Time Markov Chain

- Equação de Chapman-Kolmogorov

$H(s,t) = H(s,u)\,H(u,t);\ 0 \le s \le u \le t$

Substituindo u por t e t por $t+h$, então:

$H(s,t+h) = H(s,t)\,H(t,t+h)$

Subtraindo-se ambos os lados por $H(s,t)$, temos:

$H(s,t+h) - H(s,t) = H(s,t)\,[H(t,t+h) - I]$

Dividindo-se por h e aplicando-se o limite $h \to 0$, tem-se:

$$\lim_{h \to 0} \frac{H(s,t+h) - H(s,t)}{h} = H(s,t)\left[\lim_{h \to 0} \frac{H(t,t+h) - I}{h}\right]$$

Levando à equação diferencial parcial $\frac{\partial H(s,t)}{\partial t} = H(s,t)Q(t)$

Continuos Time Markov Chain

- Equação de Chapman-Kolmogorov

$\frac{\partial H(s,t)}{\partial t} = H(s,t)Q(t)$ *(forward Kolmogorov eq.)*

Onde $Q(t) = \lim_{h \to 0} \frac{H(t,t+h) - I}{h}$

Os elementos de $Q(t)$ são dados por

$$q_{ii}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{p_{ii}(t,t+h) - 1}{h}$$

$$q_{ij}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{p_{ij}(t,t+h)}{h} \qquad i \neq j$$

Continuos Time Markov Chain

- Equação de Chapman-Kolmogorov

$1 - p_{ii}(t,t+h) = -hq_{ii}(t) + o(h)$

$p_{ij}(t,t+h) = hq_{ij}(t) + o(h)$

Onde $o(h)$ é uma função de converge para zero mais rápido que h.

Dado que $\sum_j p_{ij}(s,t) = 1,\ \forall\ i$, portanto:

$$\sum_j q_{ij}(s,t) = 0,\ \forall\ i$$

Ou seja, a soma de elementos de uma linha de Q é zero.

Continuos Time Markov Chain

- Equação de Chapman-Kolmogorov

$\frac{\partial H(s,t)}{\partial t} = H(s,t)Q(t)$ *(forward Kolmogorov eq.)*

Para cadeias homogêneas, tem-se:

$Q(t) = Q$ e $H(s,t) = \Pi(t)$

Continuos Time Markov Chain

- *Steady State Analysis*

$\frac{d\Pi(t)}{dt} = \Pi(t)Q$ (homogêneas)

Em estado estacionário ($t \to \infty$), pode ser que

$\lim_{t \to \infty} \Pi(t) = \Pi(t)$ exista.

Caso exista, então $\sum_{si \in S} \pi_{si} = 1$

$\frac{d\Pi(t)}{dt} = 0$, então $\Pi Q = 0$

Continuos Time Markov Chain

- Soluções para *Steady-States*

$\Pi Q = 0$

$\sum_{si \in S} \pi_{si} = 1$

Onde π_s fornece a *steady-state probability* de um sistema estar no estado s_i

- Soluções Transientes

$\frac{d\Pi(t)}{dt} = \Pi(t)Q$

Onde $\pi(t)_{si}$ é probabilidade de se estar na estado s_i no instante t

Continuos Time Markov Chain

- Uma CTMC é dita irredutível se $p_{ij} > 0 \ \forall s_i, s_j \in S$ (todo estado s_j é alcançável de qualquer estado s_i).
- Uma CTMC finita, irredutível e homogênea é dita ergódica (*ergodic*) se o vetor de probabilidade estacionária (*steady-state probability vector*) Π existe.

Continuos Time Markov Chain

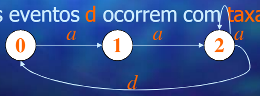
- Soluções para *Steady-States*

$\Pi Q = \underline{0} \qquad \sum_{s_i \in S} \pi_{s_i} = 1$

- **Métodos diretos**
  - Eliminação de Gauss
  - Decomposição LU
  - Método de Grassmann
- **Métodos Iterativos**
  - Power Method
  - Método de Jacobi
  - Método de Gauss-Seidel

Continuos Time Markov Chain

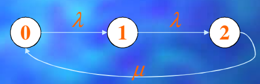
- Suponha um sistema representado por um autômato estocástico, onde:
  - $S = \{0,1,2\}$
  - $E = \{a,d\}$
  - $f(0,a)=1$, $f(1,a)=2$, $f(2,a)=2$, $f(2,d)=0$
  - $\Gamma(0) = \{a\}$, $\Gamma(1) = \{a\}$, $\Gamma(2) = \{a,d\}$
  - Os eventos a ocorrem com taxa igual $= \lambda$,
  - Os eventos d ocorrem com taxa igual $= \mu$



State Transition Diagram

Continuos Time Markov Chain

- *State Transition Rate Diagram*



$$Q = \begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccc} -\lambda & \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda \\ \mu & 0 & -\mu \end{array} \right| \\ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \ \end{array}$$

$\sum_{s_i \in S} \pi_{s_i} = 1$

$\Pi\, Q = 0$

$(\pi_0, \pi_1, \pi_2)\ Q = (0,0,0)$

$-\lambda\, \pi_0 + \mu\, \pi_2 = 0$

$\lambda\, \pi_0 - \lambda\, \pi_1 = 0$

$-\lambda\, \pi_1 - \mu\, \pi_2 = 0$

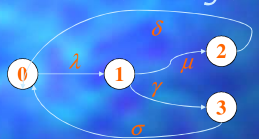
$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$

$\pi_0 = \pi_1 = \mu / (2\,\mu + \lambda)$

$\pi_2 = \lambda / (2\,\mu + \lambda)$

Continuos Time Markov Chain

- *State Transition Rate Diagram*



$$Q = \begin{array}{c} \left| \begin{array}{cccc} -\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -(\gamma+\mu) & \mu & \gamma \\ \delta & 0 & -\delta & 0 \\ \sigma & 0 & 0 & -\sigma \end{array} \right| \\ \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \ \end{array}$$

$\sum_{s_i \in S} \pi_{s_i} = 1$

$\Pi\, Q = 0$

$(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3)\ Q = (0,0,0)$

$T = 1 / (\pi_0 \times \lambda)$ - Tempo médic

Continuos Time Markov Chain

- Soluções Transientes

$\dfrac{\underline{d\Pi(t)}}{dt} = \Pi(t)Q$, $\Pi(0) = (\pi_0(0), \ldots, \pi_{n-1}(0))$

Onde $\pi_{s_i}(t)$ é probabilidade de se estar na estado s_i no instante t

Métodos de Solução:

- Solução via Sistemas de Eq. Diferencial Ordinária
- Solução através de transformada de Laplace
- Runge-Kutta
- Uniformização (Transformar CTMC em DTMC)

Continuos Time Markov Chain

- Soluções Transientes

$\frac{d\Pi(t)}{dt} = \Pi(t)Q$, $\Pi(0) = (\pi_0(0), \ldots, \pi_{n-1}(0))$

Uma solução formal para o sistema acima é:

$\Pi(t)=\Pi(0)e^{Qt}$

Pela série de Taylor/MacLaurin, temos:

$e^{Qt}= I + Qt/1! + (Qt)^2/2! + (Qt)^3/3! + \ldots$

$= \sum_{k=0}^{\infty} (Qt)^k/k!$

Continuos Time Markov Chain

- Soluções Transientes

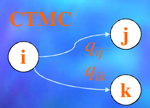
$\Pi(t)=\Pi(0)e^{Qt} = \Pi(0)\sum_{k=0}^{\infty} (Qt)^k/k!$

- Problemas de arrendodamento ocorrem devido aos valores positivos e negativos que ocorrem em Q.
- A matriz $(Qt)^k$ se torna não-esparsa o que requer capacidade muito maior.

Para evitar estes problemas aplica-se o método chamado de uniformização (ou aleatorização - *Randomization*) também chamado de método de Jensen

Continuos Time Markov Chain

- Uniformização



$\Lambda(i) = q_{ij}+ q_{ik}$

Sabe-se também que:

$p_{ij} = q_{ij}/ \Lambda(i)$ e $p_{ik} = q_{ik}/ \Lambda(i)$

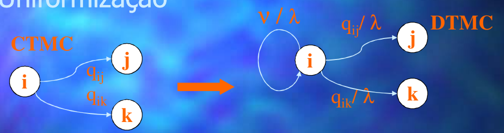
Considere uma taxa uniforme λ onde:

$\lambda = q_{ij}+ q_{ik}+ \nu$

e $\nu \geq 0$ é a taxa de arbitrária de um evento fictício que se deseja introduzir e que não muda de estado *i*.

Continuos Time Markov Chain

- Uniformização



$\Lambda(i) = q_{ij}+ q_{ik}$

$\lambda = q_{ij}+ q_{ik}+ \nu$

Sabe-se também que:

$\lambda \geq \max_{\forall si \in S}\{|q_{ij}|\}$

$p_{ij} = q_{ij}/ \Lambda(i)$ e $p_{ik} = q_{ik}/ \Lambda(i)$

Continuos Time Markov Chain

- Uniformização

- $P = I + Q/ \lambda$
- $Q = \lambda(P - I)$

$\lambda = q_{ij}+ q_{ik}+ \nu$

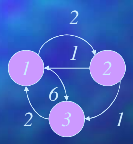
$\lambda \geq \max_{\forall si \in S}\{-q_{ij}\}$

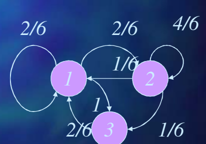
Continuos Time Markov Chain

- Uniformização
- $Q = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 6 & 0 & -6 \end{pmatrix}$

$P = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- $P = I + Q/ \lambda$
- $Q = \lambda(P - I)$
- $\lambda \geq \max_{\forall si \in S}\{|q_{ij}|\}$





Continuos Time Markov Chain

- Soluções Transientes

$\Pi(t)=\Pi(0)e^{Qt} = \Pi(0)e^{\lambda(P-I)t}$

$= \Pi(0)e^{\lambda Pt} e^{-\lambda It} = \Pi(0)e^{\lambda Pt} e^{-\lambda t} =$

$\Pi(0)\, e^{-\lambda t} e^{\lambda Pt} = \Pi(0)\, e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda Pt)^n/n! =$

$\Pi(0)\, e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda t)^n P^n/n!\ ,\ n\in \aleph$

Na matriz P os valores estão entre 0 e 1. Não há valores negativos, o que evita os erros de arrendodamento que ocorrem na expansão com a matriz Q.

Continuos Time Markov Chain

- Soluções Transientes

$\Pi(t)=\Pi(0)e^{Qt} = \Pi(0)\, e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda t)^n P^n/n!\ ,\ n\in \aleph$

$\psi(\lambda t,n) = [e^{-\lambda t} (\lambda t)^n]/n!\ ,\ n\in \aleph$

$\Pi(t)=\Pi(0) \sum_{n=0}^{\infty} \psi(\lambda t,n)P^n\ ,\ n\in \aleph$

Continuos Time Markov Chain

- Soluções Transientes

$\Pi(t)=\sum_{n=0}^{\infty} \psi(\lambda t,n)\, \Pi(0)P^n\ ,\ n\in \aleph$

Uma solução iterativa:

$\Pi(t)=\sum_{n=0}^{\infty} \psi(\lambda t,n)\, \hat{\Pi}(n)\ ,\ n\in \aleph$

$\hat{\Pi}(0)= \Pi(0),\ \ \hat{\Pi}(n) = \hat{\Pi}(n-1)P\ ,\ n\in \aleph$

Podemos truncar a série de maneira que a se atinja uma exatidão ε.

Continuos Time Markov Chain

- Soluções Transientes

Portanto:

$\tilde{\Pi}(t)=\sum_{n=0}^{ke} \psi(\lambda t,n)\, \hat{\Pi}(n)\ ,\ n\in \aleph$

$\| \Pi(t)- \tilde{\Pi}(t)\| = \{[\Pi(0)\, e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda Pt)^n/n!] -$

$[\Pi(0)\, e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{ke} (\lambda Pt)^n/n!\ ]\} = \varepsilon$

Sabemos que $\Pi(0)\, e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda Pt)^n/n! =1$

Continuos Time Markov Chain

- Soluções Transientes

Portanto:

$\| \Pi(t)- \tilde{\Pi}(t)\| = 1 - \Pi(0)\, e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{ke} (\lambda Pt)^n/n! = \varepsilon$

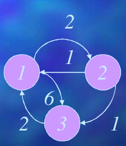
$\Pi(0)\, e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{ke} (\lambda Pt)^n/n! = 1- \varepsilon \quad \Rightarrow$

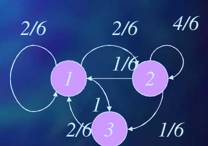
$\sum_{n=0}^{ke} e^{-\lambda t} (\lambda t)^n/n! \le 1- \varepsilon \quad \Rightarrow$

$\sum_{n=0}^{ke} (\lambda t)^n/n! \le (1- \varepsilon)\, e^{\lambda t}$

Continuos Time Markov Chain

- Solução Transiente (exemplo)
- $Q = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 6 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ $\qquad P = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $P = I + Q/ \lambda$
- $Q = \lambda(P - I)$
- $\lambda \ge \max_{\forall si\in S}\{|q_{ij}|\}$





- *Considere $\varepsilon=10^{-4}$*

Continuos Time Markov Chain

- Solução Transiente (exemplo)

- $Q = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 6 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ $\qquad P = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\sum_{n=0}^{ke} (\lambda t)^n/n! \leq (1-\varepsilon)\, e^{\lambda t}$

Dado $\lambda = 6$ e considerando $\varepsilon = 10^{-4}$

Continuos Time Markov Chain

- Solução Transiente (exemplo)

t	0,1	0,2	0,5	1	5	10	20	50	100
ke	5	7	11	17	52	91	163	367	693

Para t =0,1 ⇒ ke = 5 Portanto:

$\hat{\Pi}(0) = \Pi(0) = (1,0,0)$ obtêm-se:

$\hat{\Pi}(1)$, $\hat{\Pi}(2)$, $\hat{\Pi}(3)$, $\hat{\Pi}(4)$, $\hat{\Pi}(5)$ através de

$\hat{\Pi}(n) = \hat{\Pi}(n-1)P$, $n \in \{1,2,3,4,5\}$

Continuos Time Markov Chain

- Solução Transiente (exemplo)

t	0.1	0.2	0.5	1	5	10	20	50	100
ke	5	7	11	17	52	91	163	367	693

Para t =0.1 ⇒ ke = 5

$\psi(0.6,n) = [e^{-\lambda t} (\lambda t)^n]/n!$, $n \in \{1,2,3,4,5\}$

$\tilde{\Pi}(0.1) = \sum_{n=0}^{5} \psi(0.6,n)\, \hat{\Pi}(n)$, $n \in \{1,2,3,4,5\}$

Redes com Prioridade

- Definição:

$PN=(P,T,I,O,H,\Pi,M_0)$

P,T,I,O definidos como usualmente.

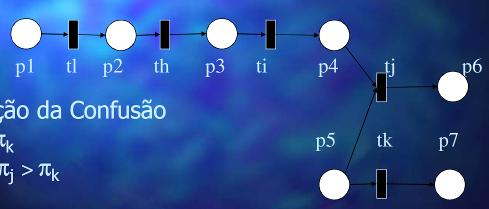
$H : P \times T \rightarrow \aleph$ é a função de mapeamento de que representam os arcos inibidores

$\Pi : T \rightarrow \aleph$ é uma função que mapeia às transições níveis de prioridade.

M_0- Marcação inicial - M_0: $P \rightarrow \aleph$

Redes com Prioridade

- $PN=(P,T,I,O,H,\Pi,M_0)$



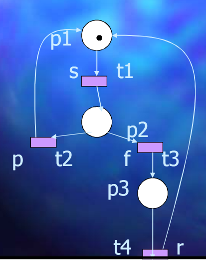
Remoção da Confusão

- $\pi_l = \pi_k$
- $\pi_h, \pi_i, \pi_j > \pi_k$

Redes Estocásticas

- Definição:

$SPN=(P,T,I,O,W,M_0)$



P é o conjunto de lugares,

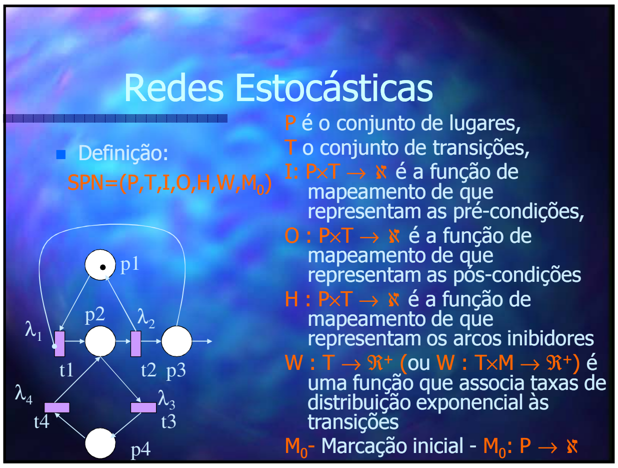
T o conjunto de transições,

I: $P \times T \rightarrow \aleph$ é a função de mapeamento de que representam as pré-condições,

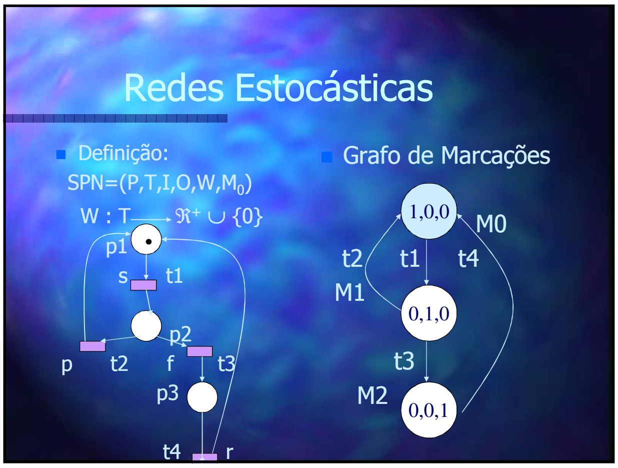
O : $P \times T \rightarrow \aleph$ é a função de mapeamento de que representam as pós-condições

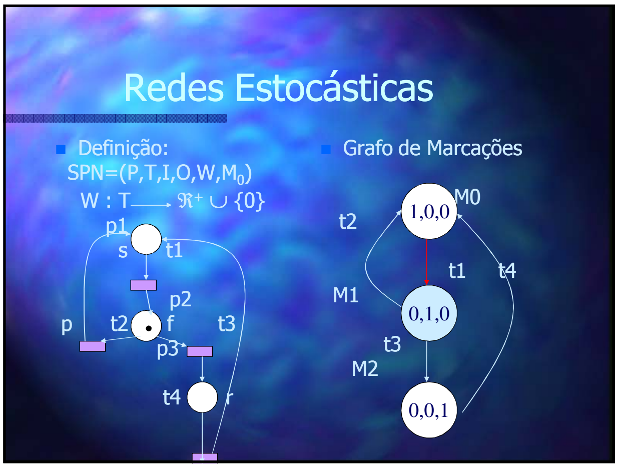
W : T → ■ (ou W : T×M → ■) é uma função que associa taxas de distribuição exponencial às transições

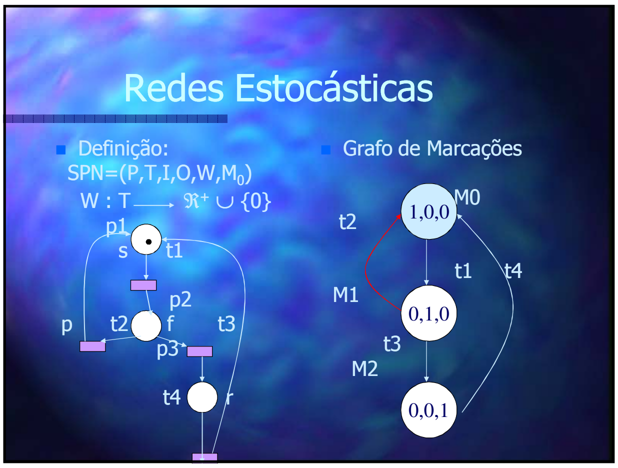
M_0- Marcação inicial - M_0: $P \rightarrow \aleph$

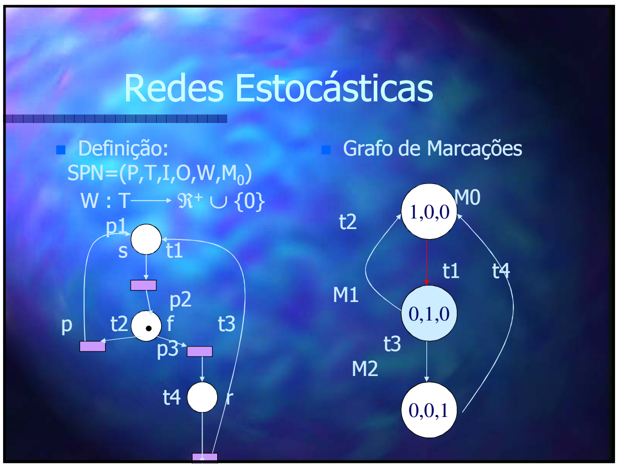

Redes Estocásticas
Definição:
SPN=(P,T,I,O,H,W,M0)
P é o conjunto de lugares,
T o conjunto de transições,
I: P×T → ℵ é a função de mapeamento de que representam as pré-condições,
O : P×T → ℵ é a função de mapeamento de que representam as pós-condições
H : P×T → ℵ é a função de mapeamento de que representam os arcos inibidores
W : T → ℜ+ (ou W : T×M → ℜ+) é uma função que associa taxas de distribuição exponencial às transições
M0- Marcação inicial - M0: P → ℵ
p1
p2
λ1
λ2
t1
t2
p3
λ4
λ3
t4
t3
p4


Redes Estocásticas
Semântica de Disparo de Transição
Uma transição tj é disparável se estiver habilitada
– Regras de habilitação
M[tj > , M(pi) >=I(pi, tj)
∀ pi ∈ P
Transições com delays menores disparam primeiro (Race)
Enabling Memory, resampling, age memory
Regras de disparo
Se M[tj >M'
M'(pi)=M0(pi) - I(pi, tj)+O(pi, tj), ∀ pi ∈ P


Redes Estocásticas
Definição:
SPN=(P,T,I,O,W,M0)
W : T → ℜ+ ∪ {0}
p1
s
t1
p2
p
t2
f
t3
p3
t4
r
Grafo de Marcações
1,0,0
M0
t2
t1
t4
M1
0,1,0
t3
M2
0,0,1

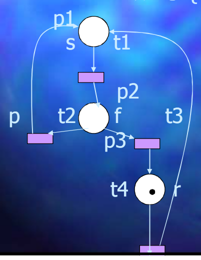

Redes Estocásticas
Definição:
SPN=(P,T,I,O,W,M0)
W : T → ℜ+ ∪ {0}
p1
s
t1
p2
p
t2
f
t3
p3
t4
r
Grafo de Marcações
t2
1,0,0
M0
t1
t4
M1
0,1,0
t3
M2
0,0,1


Redes Estocásticas
Definição:
SPN=(P,T,I,O,W,M0)
W : T → ℜ+ ∪ {0}
p1
s
t1
p2
p
t2
f
t3
p3
t4
r
Grafo de Marcações
t2
1,0,0
M0
t1
t4
M1
0,1,0
t3
M2
0,0,1

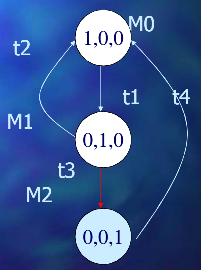

Redes Estocásticas
Definição:
SPN=(P,T,I,O,W,M0)
W : T → ℜ+ ∪ {0}
p1
s
t1
p2
p
t2
f
t3
p3
t4
r
Grafo de Marcações
t2
1,0,0
M0
t1
t4
M1
0,1,0
t3
M2
0,0,1

Redes Estocásticas

- Definição:
  SPN=(P,T,I,O,W,M_0)
  $W : T \longrightarrow \Re^+ \cup \{0\}$

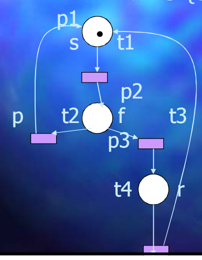


- Grafo de Marcações

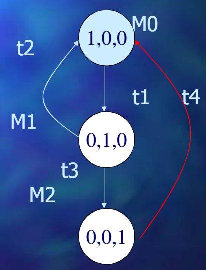


Redes Estocásticas

- Definição:
  SPN=(P,T,I,O,W,M_0)
  $W : T \longrightarrow \Re^+ \cup \{0\}$

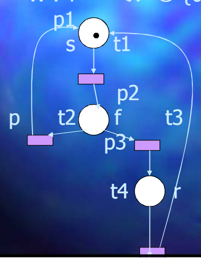


- Grafo de Marcações

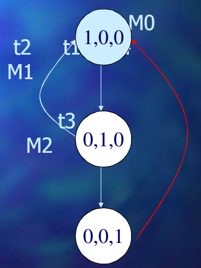


Redes Estocásticas

- Definição:
  SPN=(P,T,I,O,W,M_0)
  $W : T \longrightarrow \Re^+ \cup \{0\}$



- Grafo de Marcações



Redes Estocásticas

- Em geral, a CTMC associada a uma SPN é obtida da seguinte maneira:
  - O espaço de estados $S = \{s_i\}$ corresponde ao *reachability set* $RS(N,M_0) = \{M_i\}$ da rede marcada N.
  - As *transition rates* de cada estado s_i (corresponde a marcação M_i) para cada estado s_j (M_j) é obtido pela soma de todas as *firing rates* associadas às transições que estão habilitadas em M_i e cujo disparo leva a M_j.

Redes Estocásticas

- Assumindo-se que todas as transições operam em *Single Server Semantics* (SS) e taxas (*rates*) independentes da marcação, tem-se:

- $q_{ij} = \begin{cases} \sum_{tk \in ej(Mi)} \omega_k & i \neq j \\ -q_i & i = j \end{cases}$

onde $Q = [q_{ij}]$ gerador infinitesimal (matriz de taxas)
$q_j = \sum_{tk \in e(Mi)} \omega_k$
ω_k é a taxa de disparo de t_k.

$e_j(M_i) = \{t_k \mid t_k \in e(M_i) \wedge M_i[t_k>M_j\}$ é o conjunto de transições que estão hablitadas em M_i e cujo disparo levam a M_j.
$e(M_i)$ conjunto de transições habilitadas em M_i.

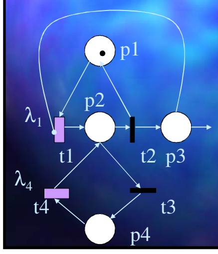
Redes Estocásticas Generalizada (GSPN)

- Definição:
  GSPN=(P,T,I,O,H,Π,W,M_0)

P,T,I,O definidos como usualmente.
$H : P \times T \rightarrow \aleph$ é a função de mapeamento de que representam os arcos inibidores

$\Pi : T \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{se t for temporizada} \\ \aleph^+ & \text{se t for imediata} \end{cases}$
(Prioridade)
$W : T \rightarrow \Re^+$ (ou $W : T \times M \rightarrow \Re^+$) é
1. uma função que associa taxas de distribuição exponencial às transições temporizadas e
2. pesos usados na computação das probabilidades de disparo das transições imediatas

M_0- Marcação inicial - $M_0: P \rightarrow \aleph$



Redes Estocásticas Generalizada (GSPN)

Semântica de Disparo de Transição

- Uma transição t_j é disparável se estiver habilitada
  - Regras de habilitação

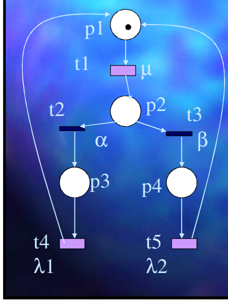
    $M[t_j >$, $M(pi) >= I(pi, t_j)$

    $\forall$ pi $\in$ P
- Transições com *delays* menores disparam primeiro (*Race*)
- Transições imediatas disparam instantaneamente com prioridades sobre as temporizadas
- Diferentes níveis de prioridade são associados às transições imediatas.
- Transições imediatas com mesmo nível de prioridade associada disparam de acordo com o peso associado a cada uma.
- *Enabling Memory, resampling, age memory*
- Regras de disparo

  Se $M[t_j > M'$

  $M'(pi)=M0(pi) - I(pi, t_j)+O(pi, t_j)$, $\forall$ pi $\in$ P

Redes Estocásticas Generalizada (GSPN)



Reachability Set

RS = VS ∪ TS

VS ∩ TS = ∅

VS – *Vanishing set:*

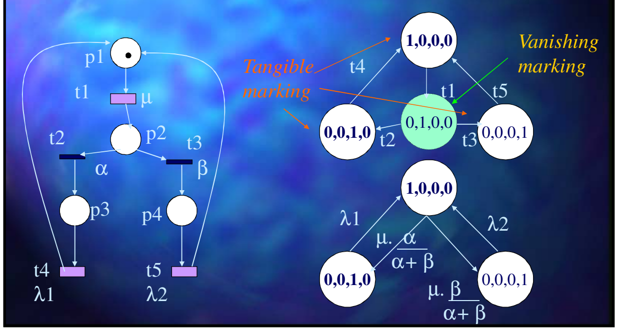
Marcações em que as transições disparáveis são imediatas.

TS – *Tangible set:*

Marcações onde as transições habilitadas são temporizadas.

Redes Estocásticas Generalizada (GSPN)

- Grafo de Marcações



Redes Estocásticas

- Para garantir a existência de probabilidade estacionária, a rede deve ser:
  - limitada *(bounded)*
  - reversível e
  - livre de bloqueio *(deadlock-free)*
  - $\Pi Q = 0, \sum_{Mi \in RS(N)} \pi_i=1$

Probabilidade estacionária de uma marcação M_i

$(\pi_1,\ldots,\pi_i,\ldots, \pi_n)\ Q = (0,\ldots,0,\ldots,0)$

$\sum_1^n \pi_i=1$

Redes Estocásticas

- Soluções Transientes

$$\frac{d\Pi(t)}{dt} = \Pi(t)Q\ ,\ \Pi(0) = (\pi_0(0), \ldots,\pi_{n-1}(0))$$

Uma solução formal para o sistema acima é:

$\Pi(t)=\Pi(0)e^{Qt}$

Redes Estocásticas

- Dadas $M_j \in TS(N)$, a probabilidade de se disparar t_k em M_j é:

  $p(t_k,M_j)= \lambda_k/\lambda_j,$ $\lambda_j= \Sigma_{t\in Tj}\, \lambda_t$

  $T_j = \{t \mid M_j\ [t>\}$

  λ_t é a taxa associada a transição t através da W

Redes Estocásticas

- Dadas $M_i \in VS(N)$, a probabilidade de se disparar t_k em M_i é:

$$p(t_k, M_i) = \omega_k / \omega_k(M_i),$$

$$\omega_k(M_i) = \Sigma_{tj \in \{ECS(tk) \wedge Mi\,[tj>\}}\ \omega_j$$

ECS(tk) – *Extended Conflict Set*

$\omega_k(M_i)$ o peso associado à transição t_k na marcação M_i.

Caso haja mais de uma transição imediata, de diferentes ECS, habilitadas em uma marcação M, não importa a ordem de disparo, desde que a rede seja livre de confusão.

Redes Estocásticas

- Tempo de permanência numa marcação *(sojourn time)*

$$tm_i = \min_{tj \in T_i} (1/\lambda_j)$$

$T_i = \{t_j \mid M_i[t_j >\}$

Redes Estocásticas

- Probabilidade que um lugar p_j tenha k marcas

$$p(pj,k) = \Sigma_{i \in S1}\ p_i$$

$S_1 = \{ i \in \{1,2,..,S\} \mid M_i(p_j)=k\}$

- Número esperado de marcas no lugar p_j

$$Em(p_j) = \sum_{x=1}^{K} x\ .p(pj,x)$$

K é o número máximo de marcas que o lugar pj pode conter

Redes Estocásticas

- *Throughput rate* de uma transição

$$TR(t_j) = \Sigma_{i \in S2}\ p_i\ .\ \lambda(t_j)$$

$S_2 = \{ i \in \{1,2,..,S\} \mid M_i[t_j>\}$

- p_i é a probabilidade estacionária de uma marcação Mi que habilita t_j
- $\lambda(t_j)$ é a taxa associada a transição

Redes Estocásticas

- Tempo médio de disparo de uma transição

$$T = 1/TR(t_j) = 1/(\Sigma_{i \in S2}\ p_i\ .\ \lambda(t_j))$$

$S_2 = \{ i \in \{1,2,..,S\} \mid M_i[t_j>\}$

- p_i é a probabilidade estacionária de uma marcação Mi que habilita t_j
- $\lambda(t_j)$ é a taxa associada a transição

Redes Estocásticas

- Aproximando Outras Distribuições
  - Variáveis Suplementares
  - Aproximação por Fases
    - *Moment Matching*

Para encontrar uma distribuição por fase adequada para uma distribuição genérica, duas atividades são fundamentais:
- Determinar o tipo de aproximação necessária.
- Encontrar os parâmetros numéricos da aproximação.

Redes Estocásticas

- Aproximação por Fases

Pontos a serem considerados na escolha de uma aproximação por fases.

- Qualidade da aproximação: quanto mais próximo for a distribuição por fase da distribuição real, melhor.
  - Medidas de aproximação:
    - *Moment matching*
    - Encontrar um pdf (ou cdf) que seguem a pdf real numa determinada região de interesse.

Redes Estocásticas

- Aproximação por Fases

Pontos a serem considerados na escolha de uma aproximação por fases.

- Número de Estados da Aproximação: é importante fazer com que o número de estados seja o menor possível.
- Facilidade da obtenção do modelo markoviano resultante: pode ser possível obter uma aproximação que gere excelentes resultados. No entanto, pode não ser fácil a integração no modelo markoviano resultante.

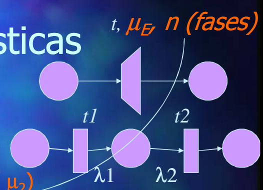
Redes Estocásticas

- Aproximação por Fases

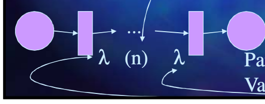
Pontos a serem considerados na escolha de uma aproximação por fases.

- Facilidade de obtenção dos parâmetros da aproximação: quanto mais parâmetros sejam necessários para especificar a aproximação, mais difícil se torna para encontrá-los.

Redes Estocásticas



- Aproximação por Fases
- Distribuição de Erlang
  - $\tau = \tau_1 + \tau_2$ $(\lambda_1 = 1/\mu_1, \lambda_2 = 1/\mu_2)$
  - $f\tau(t) = (f\tau_1 * f\tau_2)(t) = \lambda_1 \lambda_2 (e^{-\lambda 1t} - e^{-\lambda 2t})/(\lambda_1 - \lambda_2)$
  - Generalizando para n fases iguais a λ.
    - $f\tau(t) = (\lambda^n t^{(n-1)} e^{-\lambda t})/(n-1)!$, $t \geq 0$

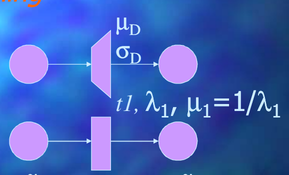


Parâmentros:n, λ; Valor Esperado: $\mu_E = n/\lambda$
Variância: $1/n\lambda^2$ (λ - de cada fase)

Redes Estocásticas

Distribuição Especificada (empírica)

- *Moment Matching*

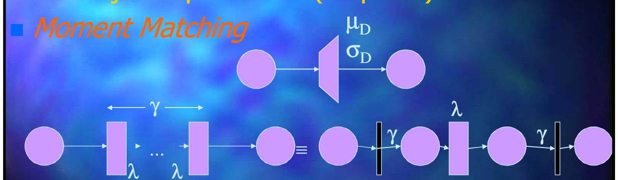


- Se $\mu_D/\sigma_D = 1$ então uma transição exponencial é suficiente. $\lambda_1 = 1/\mu_D$

Redes Estocásticas

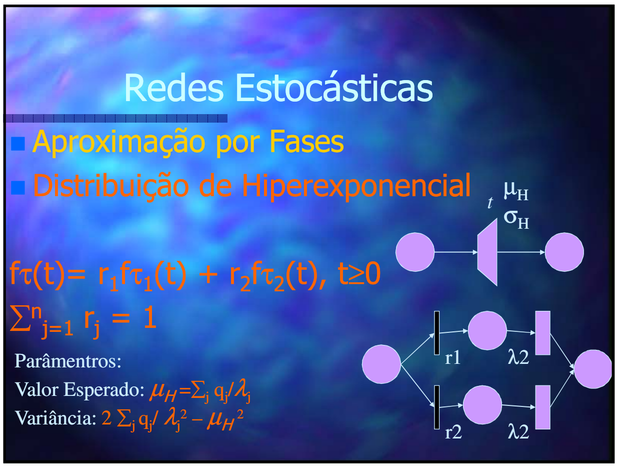
Distribuição Especificada (empírica)

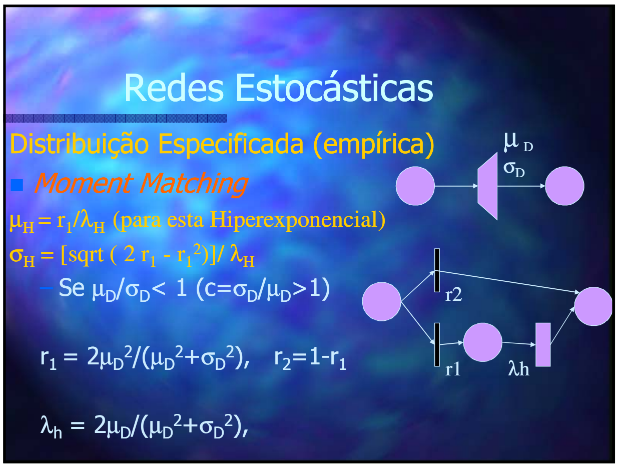
- *Moment Matching*

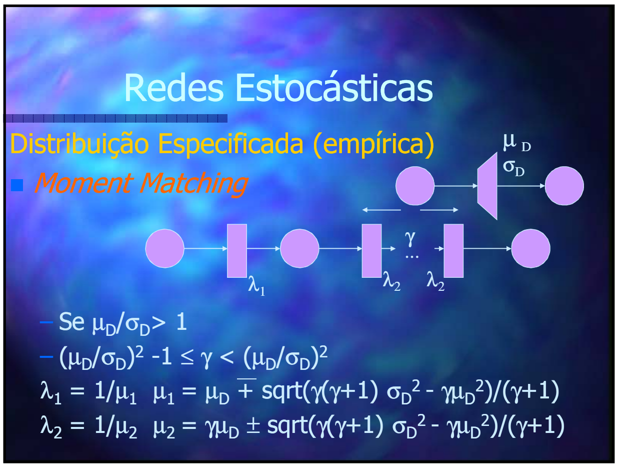


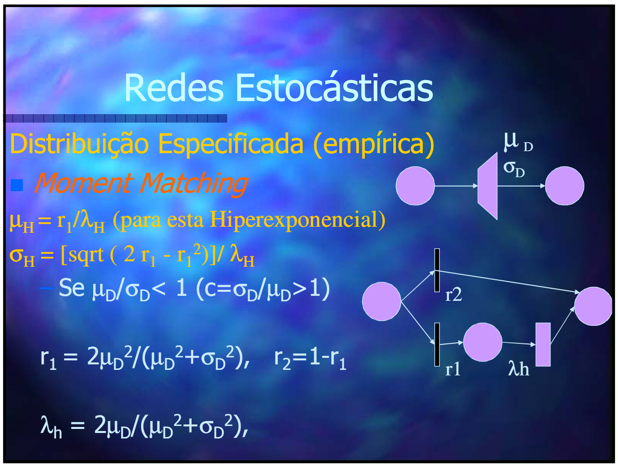
- Se $\mu_D/\sigma_D = x \neq 1, x \in Z$

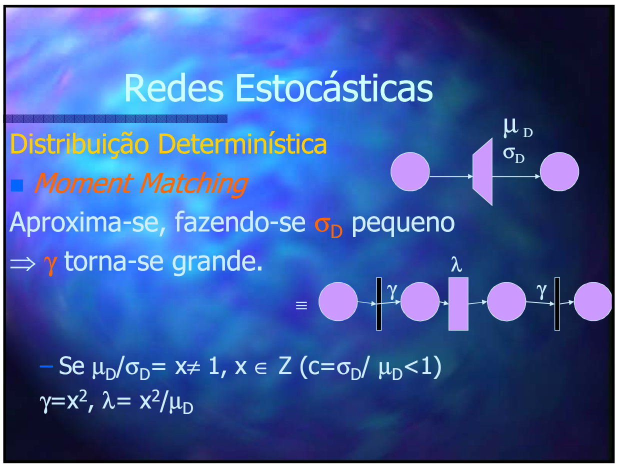
$\gamma = (\mu_D/\sigma_D)^2 = x^2$, $\lambda = \gamma/\mu_D = x^2/\mu_D$

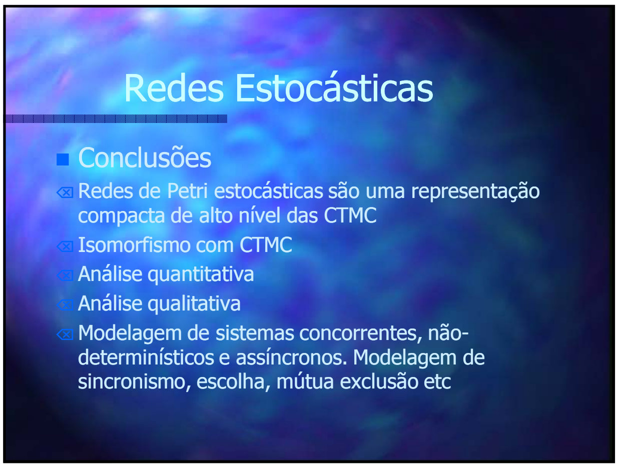

Redes Estocásticas
Aproximação por Fases
Distribuição de Hiperexponencial
$f\tau(t) = r_1 f\tau_1(t) + r_2 f\tau_2(t),\ t \geq 0$
$\sum^n_{j=1} r_j = 1$
Parâmentros:
Valor Esperado: $\mu_H = \sum_j q_j/\lambda_j$
Variância: $2 \sum_j q_j/\lambda_j^2 - \mu_H^2$
t
μ_H
σ_H
r1
λ2
r2
λ2


Redes Estocásticas
Distribuição Especificada (empírica)
Moment Matching
$\mu_H = r_1/\lambda_H$ (para esta Hiperexponencial)
$\sigma_H = [\mathrm{sqrt}(2 r_1 - r_1^2)]/\lambda_H$
– Se $\mu_D/\sigma_D < 1$ ($c=\sigma_D/\mu_D>1$)
$r_1 = 2\mu_D^2/(\mu_D^2+\sigma_D^2)$, $r_2=1-r_1$
$\lambda_h = 2\mu_D/(\mu_D^2+\sigma_D^2)$,
μ_D
σ_D
r2
r1
λh


Redes Estocásticas
Distribuição Especificada (empírica)
Moment Matching
μ_D
σ_D
λ_1
γ
...
λ_2
λ_2
– Se $\mu_D/\sigma_D > 1$
– $(\mu_D/\sigma_D)^2 - 1 \leq \gamma < (\mu_D/\sigma_D)^2$
$\lambda_1 = 1/\mu_1$ $\mu_1 = \mu_D \mp \mathrm{sqrt}(\gamma(\gamma+1)\sigma_D^2 - \gamma\mu_D^2)/(\gamma+1)$
$\lambda_2 = 1/\mu_2$ $\mu_2 = \gamma\mu_D \pm \mathrm{sqrt}(\gamma(\gamma+1)\sigma_D^2 - \gamma\mu_D^2)/(\gamma+1)$


Redes Estocásticas
Distribuição Especificada (empírica)
Moment Matching
$\mu_H = r_1/\lambda_H$ (para esta Hiperexponencial)
$\sigma_H = [\mathrm{sqrt}(2 r_1 - r_1^2)]/\lambda_H$
– Se $\mu_D/\sigma_D < 1$ ($c=\sigma_D/\mu_D>1$)
$r_1 = 2\mu_D^2/(\mu_D^2+\sigma_D^2)$, $r_2=1-r_1$
$\lambda_h = 2\mu_D/(\mu_D^2+\sigma_D^2)$,
μ_D
σ_D
r2
r1
λh


Redes Estocásticas
Distribuição Determinística
Moment Matching
Aproxima-se, fazendo-se σ_D pequeno
⇒ γ torna-se grande.
μ_D
σ_D
≡
γ
λ
γ
– Se $\mu_D/\sigma_D = x \neq 1$, $x \in Z$ ($c=\sigma_D/\mu_D<1$)
$\gamma=x^2$, $\lambda = x^2/\mu_D$


Redes Estocásticas
Conclusões
Redes de Petri estocásticas são uma representação compacta de alto nível das CTMC
Isomorfismo com CTMC
Análise quantitativa
Análise qualitativa
Modelagem de sistemas concorrentes, não-determinísticos e assíncronos. Modelagem de sincronismo, escolha, mútua exclusão etc

Redes Estocásticas

- Extensões às SPN
  - GSPN (Marsan et al.)
  - DSPN (Lindermann, Ciardo)

Redes Estocásticas

- Bibliografia
  - Modelling with Generalized Stochastic Petri Nets, A. Marsan et al, John Wiley & Sons, 1995.
  - Performance Modelling with Deterministic and Stochastic Petri Nets, C. Lindermann, John Wiley & Sons, 1998.
- http://www.daimi.au.dk/PetriNets