Redes de Petri Temporizadas

Prof. Eduardo Tavares
Prof. Paulo Maciel
Centro de Informática (UFPE)

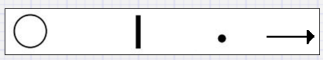
Redes de Petri

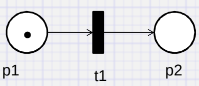
Família de modelos formais, a qual considera ações e estados

Notação gráfica bem definida

Permite representar sistemas com
- Concorrência
- Distribuição
- Paralelismo
- Não-determinismo

Redes de Petri





Redes de Petri – Relação de Fluxo

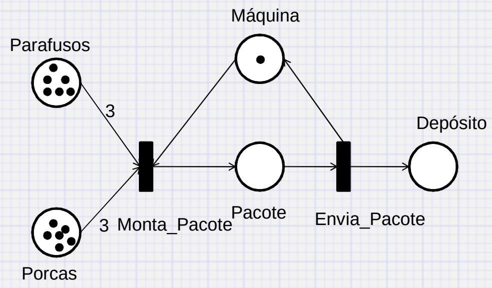
$N=(P,T,F,W,M_0)$

P - Conjunto de lugares – Estados locais
T – Conjunto de transições – Ações
$F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$ - Acos
W: F $\rightarrow \aleph$ – Valoração.
M_0: P $\rightarrow \aleph$ – Marcação Inicial

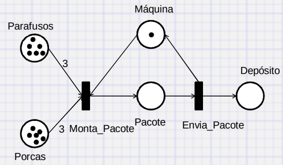
W(f) = 0, se $f \notin F$ W(f) = $x \in N$, se $f \in F$

Seja $X = P \cup T$
$^\bullet X = \{y \in Y | (y,x) \in A\}$ – Conjunto de entrada
$X^\bullet = \{y \in Y | (x,y) \in A\}$ – Conjunto de saída

Redes de Petri



Redes de Petri



R_{LP}=(P,T,F,W,M_0)

P = {Parafusos, Porcas, Maquina, Pacote, Deposito}

T = {Monta Pacote, Envia Pacote}

F = {(Parafusos,Monta Pacote),(Porcas,Monta Pacote), (Maquina,Monta Pacote),(Monta Pacote, Pacote), (Pacote, Envia Pacote), (Envia Pacote, Maquina),(Envia Pacote, Deposito)}

W = {(Parafusos,Monta Pacote,3),(Porcas,Monta Pacote,3), (Maquina,Monta Pacote,1),(Monta Pacote, Pacote,1), (Pacote, Envia Pacote,1), (Envia Pacote, Maquina,1),(Envia Pacote, Deposito,1)}

M_0 = {(Parafusos,6),(Porcas,6), (Maquina,1),(Pacote,0),(Deposito,0)}

Semântica

Conjunto de transições habilitadas

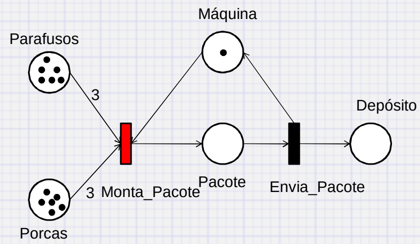
$ET(m_i) = \{ t \in T \mid mi(p_j) >= W(p_j,t)\},\ \forall p_j \in P$

Função de próximo estado

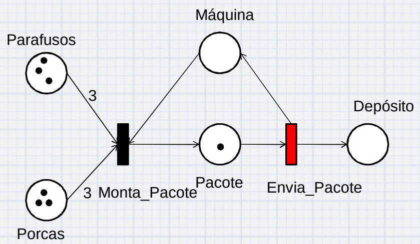
Disparo de $t \in T$,

$M_j(p) = M_i(p) - W(p,t) + W(t,p),\ \forall p_j \in P$

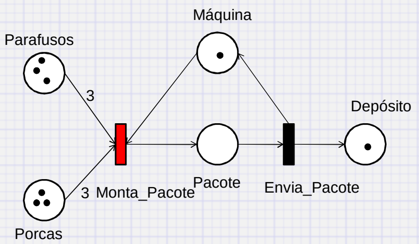
Redes de Petri



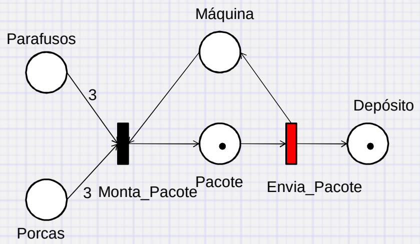
Redes de Petri



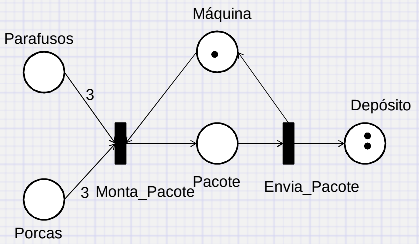
Redes de Petri



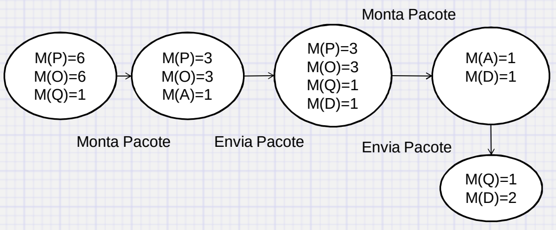
Redes de Petri



Redes de Petri



Redes de Petri



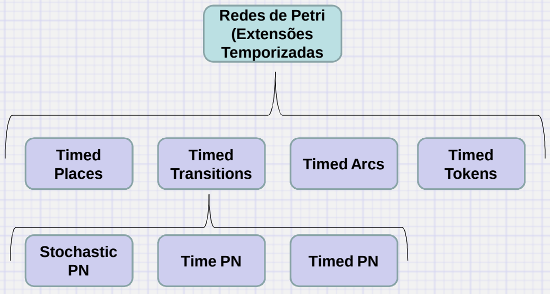
P=Parafuso, O = Porca, Q= Máquina, A=Pacote,D=Depósito

Modelos Temporizados

Os modelos, que possibilitam a especificação do tempo físico, podem representar os tempos de formas distintas:

- Intervalo
- De forma determinística
- Forma probabilística. Distribuição exponencial geralmente adotada.

Redes de Petri Temporizadas



Redes de Petri Temporizadas

Breve Histórico:

- Ranchandani, 1973 – Transition Timed Net
- Merling, 1976 – Transition Time Net
- Sifakis, 1977 – Place Timed Net

Extensões estocástica (*Delay é uma variável aleatória de distribuição exponencial)*

Natkin, 1980

Moloy, 1981

Marsan et al., 1984

Lugares Temporizados

Tempo associados com lugares

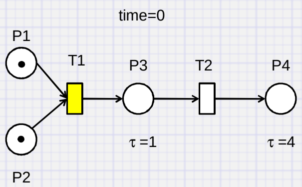
Tokens ficam disponíveis nos lugares de saída após a passagem de um tempo especificado

Classificação dos tokens: disponíveis e indisponíveis

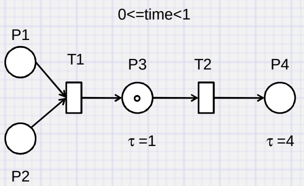
Tokens disponíveis habilitam transições

Conceito de *Holding Durations*

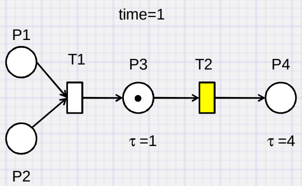
Lugares Temporizados



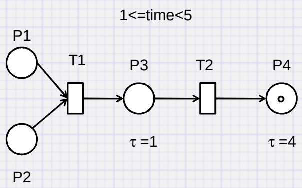
Lugares Temporizados



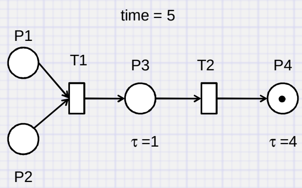
Lugares Temporizados



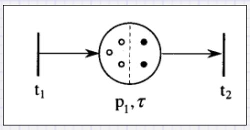
Lugares Temporizados



Lugares Temporizados



Lugares Temporizados

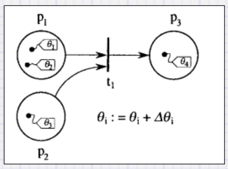


Tokens temporizados

Tempo associado com os tokens

Token guarda *timestamp* (indica quando uma transição pode ser disparada)

Timestamp pode ser incrementado ao disparo de uma transição

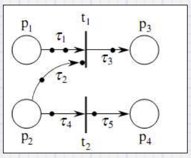


Arcos temporizados

Tempo associado com os arcos

Travelling delay é associado aos arcos

Tokens ficam indisponíveis até alcançar a transição

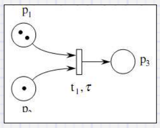


Transições Temporizadas

Extensão mais comum

Tempo associado com transições. Reresentação natural.
- Início da atividade com a habilitação da transição
- Término da atividade com o disparo da transição

O *delay* pode ser um valor constante ou intervalo



Transições Temporizadas (Conceitos Básicos)

Políticas de disparo
- Duração (Disparo em três fases)
  - *Tokens* (marcas) são consumidas dos lugares de entrada
  - Há uma duração
  - Tokens são gerados nos lugares de saída
- Disparo atômico
  - As marcas permanecem nos lugares de entrada pelo período igual ao *delay* associado à transíção
  - Após o delay, as marcas consumidas são imediatamente geradas nos lugares de saída

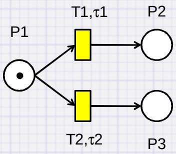
Transições Temporizadas (Conceitos Básicos)

Políticas de disparo
- Duração (Disparo em três fases)
  - O estado é uma informação mais complexa do que o modelo não temporizado
- Disparo atômico
  - O conjunto de marcações alcançáveis é um subconjunto das marcações do modelo sem temporização
  - Pode representar um modelo com duração

Transições Temporizadas (Conceitos Básicos)

Regras de Seleção

- Pré-seleção: (duração e delay)
  - Prioridade
  - Probabilidade



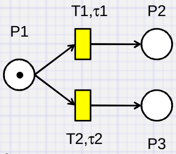
- Race(Corrida): (delay)
  - Transições com menor *delay* são disparadas

Transições Temporizadas (Conceitos Básicos)

Quando uma das transições conflitantes é desabilitada pelo disparo da outra, o que acontece com o timer daquela que ficou desabilitada?

Transições Temporizadas (Conceitos Básicos)

Como fica a memorização do tempo de habilitação anterior ?



Mecanismos Básicos de Memória

- Continue: O timer da transição mantém o valor atual e quando a transição se tornar novamente habilitada o valor do timer iniciará naquele valor
- Restart: Quando a transição for novamente habilitada o *timer* será reiniciado

Transições Temporizadas (Conceitos Básicos)

O que acontece com o timer das transições habilitadas após o disparo de uma transição? (Para todas as transições, não somente as conflitantes)

Políticas de memória

- Resampling
  - Em todos os disparos de transições, os *timers* de todas as transições são descartadas (***restart***)
  - Nenhum histórico do passado é mantido
  - Na nova marcação, um novo valor para o timer é associado para cada transição habilitada

Transições Temporizadas (Conceitos Básicos)

Políticas de memória

- Enabling Memory
  - A cada disparo de uma transição, os *timers* das transições desabilitadas na nova marcação são descartados (***restart***)
  - O valor dos *timers* de todas transições que continuam habilitadas na nova marcação são mantidas (***continue)***

Transições Temporizadas (Conceitos Básicos)

Políticas de memória

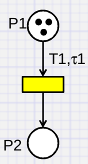
- Age Memory
  - Após cada disparo de uma transição, os *timers* mantém seus respectivos valores (***continue***), tanto para as transições habilitadas e desabilitadas na nova marcação

Transições Temporizadas (Conceitos Básicos)

Semântica de Temporização

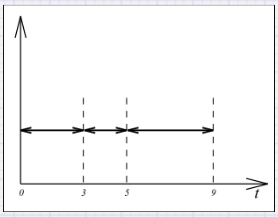
Qual procedimento deve-se realizar quando o grau de habilitação de uma transição é maior que 1?

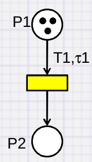
- Single-server firing semantics
- Infinite-server firing semantics
- Multiple-server firing semantics



Transições Temporizadas (Conceitos Básicos)

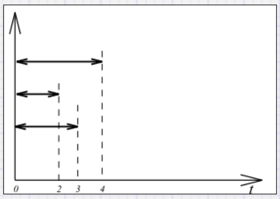
- Single-server firing semantics

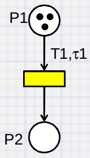




Transições Temporizadas (Conceitos Básicos)

- Infinite-server firing semantics

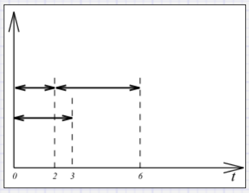


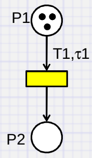


Transições Temporizadas (Conceitos Básicos)

- Multiple-server firing semantics

K = Grau máximo de paralelismo. Assuma K=2.



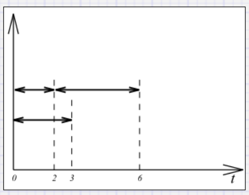


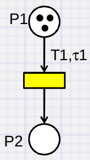
Se K=∞, então igual a infinite-server firing semantics

Transições Temporizadas (Conceitos Básicos)

- Multiple-server firing semantics

K = Grau máximo de paralelismo. Assuma K=2.





Se K=∞, então igual a infinite-server firing semantics

Leitura

F. D. J. Bowden. A Brief Survey and Synthesis of the Roles of Time in Petri Nets. *Mathematical and Computter Modelling,* 2000.

G. Balbo. Introduction to Stochastic Petri Nets. *Formal Methods on Performance Evaluation,* 2001.

Seção: Time in Petri Nets.

Time Petri Nets

Definição de Tavares09 e Barreto05 baseada em Merling76

Restrições temporais associado às transições (intervalo). Assume-se tempo discreto

Transições habilitadas – *enabled* (marcação) e disparáveis – *firable* (marcação e tempo)

Política *Enabling Memory*

Singler-server semantics e *Strong Firing Mode*

Time Petri Nets

Definition 3.6 (Petri net). *A Place/Transition net (Petri net) is a bipartite directed graph represented by a tuple (P, T, F, W, m_0), where P (set of places) and T (set of transitions) are non-empty disjoint sets of nodes ($P \cap T = \emptyset$). The edges are represented by F, where $F \subseteq A = (P \times T) \cup (T \times P)$. $W : A \to \mathbb{N}$ represents the weight of the edges, such that*

$$W(f) = \begin{cases} x \in \mathbb{N}, & if\ (f \in F) \\ 0, & if\ (f \notin F) \end{cases}$$

A marking m_i is a function ($m_i : P \to \mathbb{N}$), and m_0 is the initial marking.

Definition 3.13 (Time Petri net). *A time Petri net is defined by a tuple $(\mathcal{N}, I)$, where $\mathcal{N}$ is the underlying Petri net, and $I : T \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ represents the timing constraints, such that $I(t) = (EFT(t), LFT(t))\ \forall t \in T$, $EFT(t) \leq LFT(t)$. $EFT(t)$ is the Earliest Firing Time, and $LFT(t)$ is the Latest Firing Time.*

Definition 3.7 (Enabled Transitions). *A set of enabled transitions at marking m_i is denoted by: $ET(m_i) = \{t \in T \mid m_i(p_j) \geq W(p_j, t)\}$, $\forall p_j \in P$.*

Time Petri Nets

Vetor de clocks $c \in (\aleph \cup \{\#\})^{|T|}$

Dynamic Firing Interval: $I_D(t)$ = (DLB(t),DUB(t))

- DLB(t) = max(0,EFT(t)-c(t))
- DUB(t) = LFT(t) – c(t)

Atenção *Strong Firing Mode!*

Inicialmente, I(t)= $I_D(t)$

Time Petri Nets

Definition 3.14 (States). *Let $\mathcal{N}_\mathcal{T}$ be a time Petri net, $M \subseteq P \times \mathbb{N}$ be the set of reachable markings of $\mathcal{N}_\mathcal{T}$, and $C \subseteq (\mathbb{N} \cup \{\#\})^{|T|}$ be the set of clock vectors. The set of states S of $\mathcal{N}_\mathcal{T}$ is given by $S \subseteq (M \times C)$, that is, a state is defined by a marking, and the respective clock vector.*

Definition 3.15 (Firable Transitions). *Let $\mathcal{N}_\mathcal{T}$ be a time Petri net, the set of firable transitions at state $s \in S$ is defined by: $FT(s) = \{t_i \in ET(m) \mid\ DLB(t_i) \leq \min(DUB(t_k)),\ \forall t_k \in ET(m)\}$.*

$$\boxed{FT \subseteq ET \subseteq T}$$

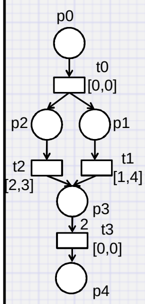
Definition 3.16 (Firing Domain). *The firing domain for a transition t at state s, is defined by the interval: $FD_s(t) = [DLB(t), \min(DUB(t_k))], \forall t_k \in ET(m)$.*

Time Petri Nets

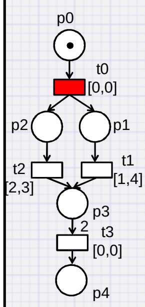
Definition 3.17 (Reachable States). *Let $\mathcal{N}_\mathcal{T}$ a time Petri net, and $s_i = (m_i, c_i)$ a reachable state. $s_j = \texttt{fire}(s_i, (t, \theta))$ denotes that firing a transition $t \in FT(s_i)$ at time $\theta \in FD_{s_i}(t)$ from the state s_i, the reached state $s_j = (m_j, c_j)$ is obtained from:*

- $\forall p \in P,\ m_j(p) = m_i(p) - W(p,t) + W(t,p)$, *as usual in Petri nets;*
- $\forall t_l \notin ET(m_j), c_j(t_l) = \#;$
- $\forall t_k \in ET(m_j),\ c_j(t_k) = \begin{cases} 0, & if(t_k = t) \\ 0, & if(t_k \in ET(m_j) - ET(m_i)) \\ c_i(t_k) + \theta, & else \end{cases}$

Time Petri Nets

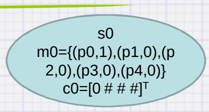


Time Petri Nets

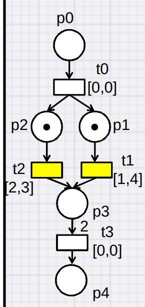


FT(s0)={t0}
c_{s0} (t0)=0

$I_D s_0$ (t0)=[0,0]
FDs_0(t0)=[0,0]



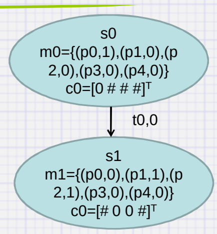
Time Petri Nets

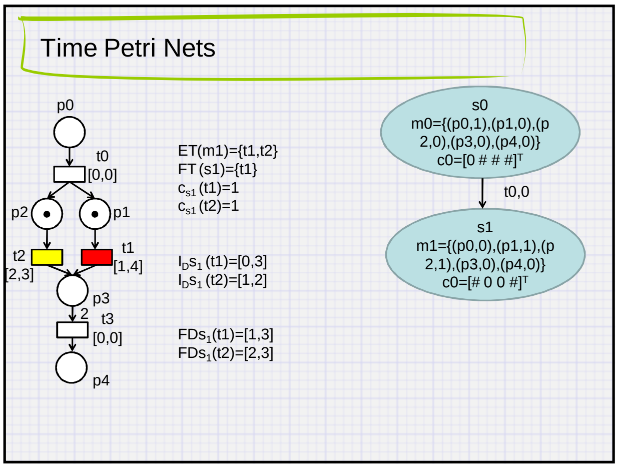


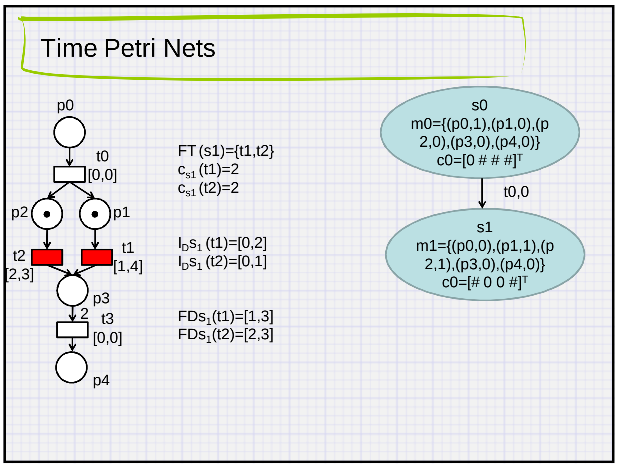
ET (m1)={t1,t2}
c_{s1} (t1)=0
c_{s1} (t2)=0

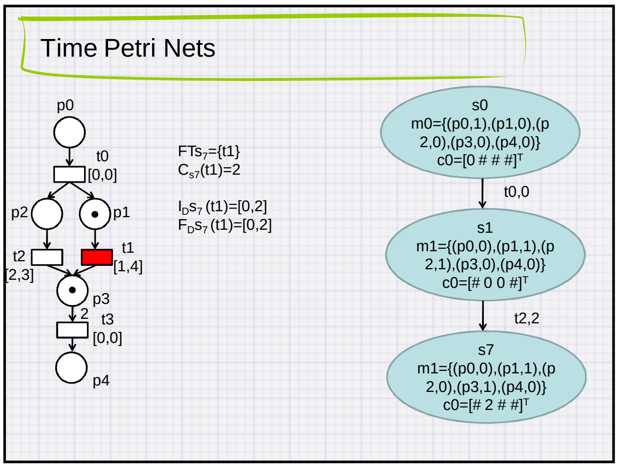
$I_D s_1$ (t1)=[1,4]
$I_D s_1$ (t2)=[2,3]

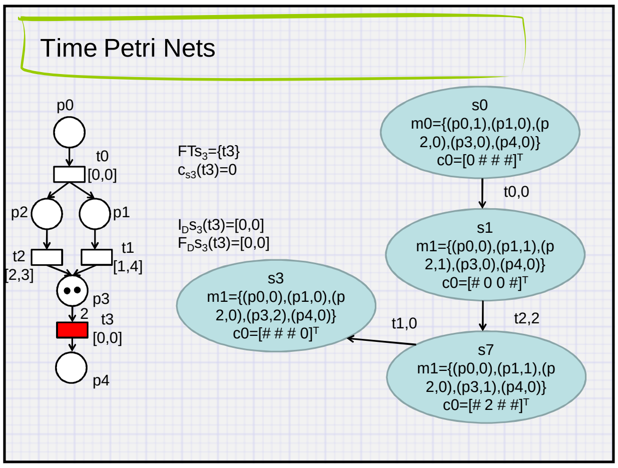
FDs_1(t1)=[1,3]
FDs_1(t2)=[2,3]



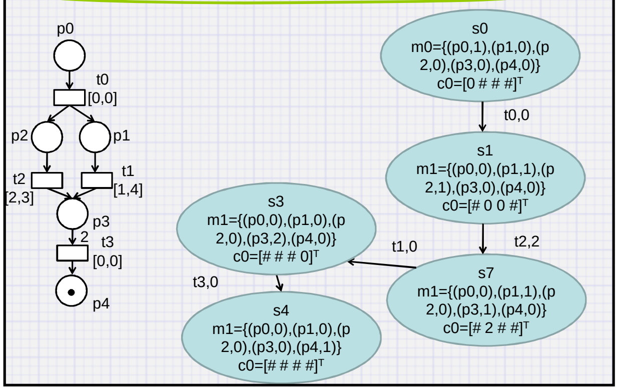

Time Petri Nets
p0
t0
[0,0]
p2
p1
t2
[2,3]
t1
[1,4]
p3
2
t3
[0,0]
p4
ET(m1)={t1,t2}
FT (s1)={t1}
c_{s1} (t1)=1
c_{s1} (t2)=1
I_DS_1 (t1)=[0,3]
I_DS_1 (t2)=[1,2]
FDs_1(t1)=[1,3]
FDs_1(t2)=[2,3]
s0
m0={(p0,1),(p1,0),(p2,0),(p3,0),(p4,0)}
c0=[0 # # #]^T
t0,0
s1
m1={(p0,0),(p1,1),(p2,1),(p3,0),(p4,0)}
c0=[# 0 0 #]^T

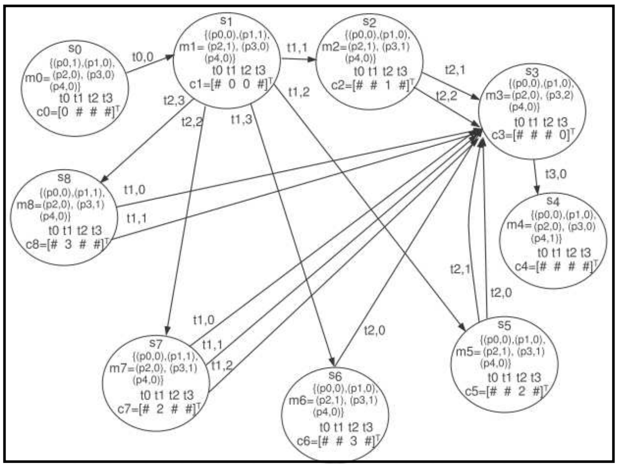

Time Petri Nets
p0
t0
[0,0]
p2
p1
t2
[2,3]
t1
[1,4]
p3
2
t3
[0,0]
p4
FT (s1)={t1,t2}
c_{s1} (t1)=2
c_{s1} (t2)=2
I_DS_1 (t1)=[0,2]
I_DS_1 (t2)=[0,1]
FDs_1(t1)=[1,3]
FDs_1(t2)=[2,3]
s0
m0={(p0,1),(p1,0),(p2,0),(p3,0),(p4,0)}
c0=[0 # # #]^T
t0,0
s1
m1={(p0,0),(p1,1),(p2,1),(p3,0),(p4,0)}
c0=[# 0 0 #]^T


Time Petri Nets
p0
t0
[0,0]
p2
p1
t2
[2,3]
t1
[1,4]
p3
2
t3
[0,0]
p4
FTs_7={t1}
C_{s7}(t1)=2
I_DS_7 (t1)=[0,2]
F_DS_7 (t1)=[0,2]
s0
m0={(p0,1),(p1,0),(p2,0),(p3,0),(p4,0)}
c0=[0 # # #]^T
t0,0
s1
m1={(p0,0),(p1,1),(p2,1),(p3,0),(p4,0)}
c0=[# 0 0 #]^T
t2,2
s7
m1={(p0,0),(p1,1),(p2,0),(p3,1),(p4,0)}
c0=[# 2 # #]^T

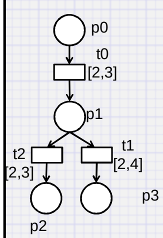

Time Petri Nets
p0
t0
[0,0]
p2
p1
t2
[2,3]
t1
[1,4]
p3
2
t3
[0,0]
p4
FTs_3={t3}
c_{s3}(t3)=0
I_DS_3(t3)=[0,0]
F_DS_3(t3)=[0,0]
s0
m0={(p0,1),(p1,0),(p2,0),(p3,0),(p4,0)}
c0=[0 # # #]^T
t0,0
s1
m1={(p0,0),(p1,1),(p2,1),(p3,0),(p4,0)}
c0=[# 0 0 #]^T
s3
m1={(p0,0),(p1,0),(p2,0),(p3,2),(p4,0)}
c0=[# # # 0]^T
t1,0
t2,2
s7
m1={(p0,0),(p1,1),(p2,0),(p3,1),(p4,0)}
c0=[# 2 # #]^T

Time Petri Nets

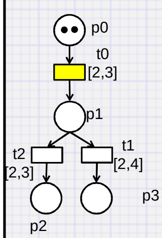




Time Petri Nets



Time Petri Nets

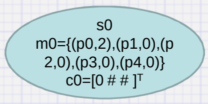


ET(s0)={t0}

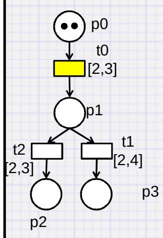
c_{s0} (t0)=0

$I_D s_0$ (t0)=[2,3]

FDs_0(t0)=[2,3]



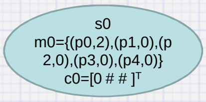
Time Petri Nets



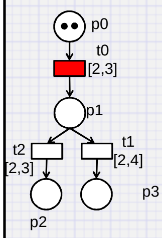
ET(s0)={t0}
c_{s0} (t0)=1

$I_D s_0$ (t0)=[1,2]

FDs_0(t0)=[2,3]



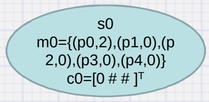
Time Petri Nets



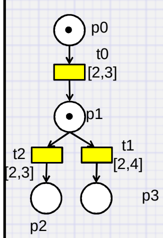
FT(s0)={t0}
c_{s0} (t0)=2

$I_D s_0$ (t0)=[0,1]

FDs_0(t0)=[2,3]



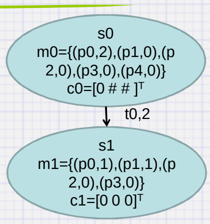
Time Petri Nets



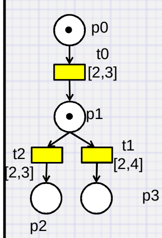
ET(s1)={t0,t2,t1}
c_{s1} (t0)=0
c_{s1} (t1)=0
c_{s1} (t2)=0

$I_D s_1$ (t0)=[2,3]
$I_D s_1$ (t1)=[2,4]
$I_D s_1$ (t2)=[2,3]

FDs_1(t0)=[2,3]
FDs_1(t1)=[2,3]
FDs_1(t2)=[2,3]



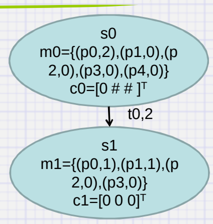
Time Petri Nets

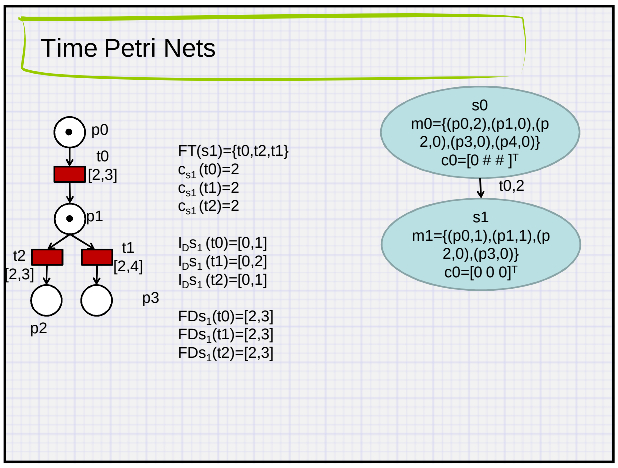


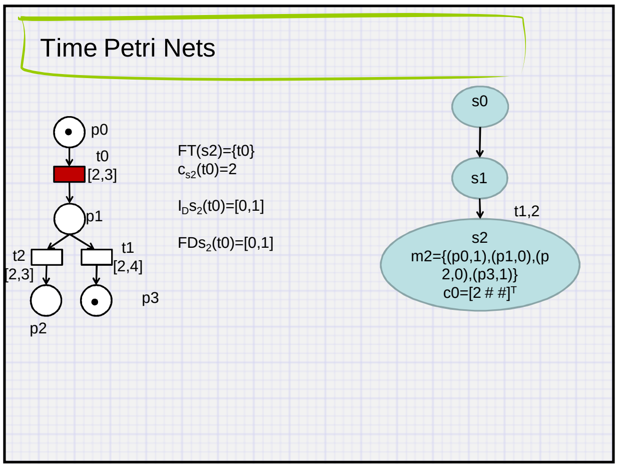
ET(s1)={t0,t2,t1}
c_{s1} (t0)=1
c_{s1} (t1)=1
c_{s1} (t2)=1

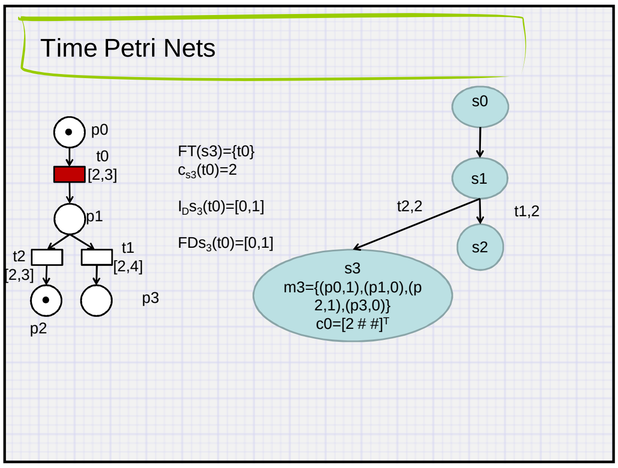
$I_D s_1$ (t0)=[1,2]
$I_D s_1$ (t1)=[1,3]
$I_D s_1$ (t2)=[1,2]

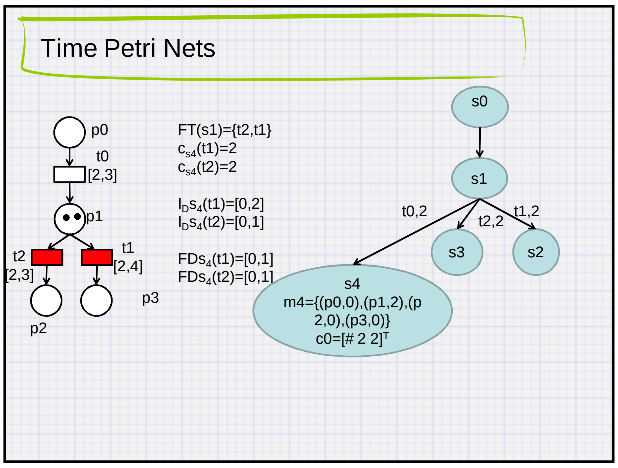
FDs_1(t0)=[2,3]
FDs_1(t1)=[2,3]
FDs_1(t2)=[2,3]




Time Petri Nets
p0
t0
[2,3]
p1
t2
[2,3]
t1
[2,4]
p2
p3
FT(s1)={t0,t2,t1}
c_{s1} (t0)=2
c_{s1} (t1)=2
c_{s1} (t2)=2
$I_D s_1$ (t0)=[0,1]
$I_D s_1$ (t1)=[0,2]
$I_D s_1$ (t2)=[0,1]
FDs_1(t0)=[2,3]
FDs_1(t1)=[2,3]
FDs_1(t2)=[2,3]
s0
m0={(p0,2),(p1,0),(p2,0),(p3,0),(p4,0)}
c0=$[0\ \#\ \#]^T$
t0,2
s1
m1={(p0,1),(p1,1),(p2,0),(p3,0)}
c0=$[0\ 0\ 0]^T$


Time Petri Nets
p0
t0
[2,3]
p1
t2
[2,3]
t1
[2,4]
p2
p3
FT(s2)={t0}
c_{s2}(t0)=2
$I_D s_2$(t0)=[0,1]
FDs_2(t0)=[0,1]
s0
s1
t1,2
s2
m2={(p0,1),(p1,0),(p2,0),(p3,1)}
c0=$[2\ \#\ \#]^T$


Time Petri Nets
p0
t0
[2,3]
p1
t2
[2,3]
t1
[2,4]
p2
p3
FT(s3)={t0}
c_{s3}(t0)=2
$I_D s_3$(t0)=[0,1]
FDs_3(t0)=[0,1]
s0
s1
t2,2
t1,2
s2
s3
m3={(p0,1),(p1,0),(p2,1),(p3,0)}
c0=$[2\ \#\ \#]^T$


Time Petri Nets
p0
t0
[2,3]
p1
t2
[2,3]
t1
[2,4]
p2
p3
FT(s1)={t2,t1}
c_{s4}(t1)=2
c_{s4}(t2)=2
$I_D s_4$(t1)=[0,2]
$I_D s_4$(t2)=[0,1]
FDs_4(t1)=[0,1]
FDs_4(t2)=[0,1]
s0
s1
t0,2
t2,2
t1,2
s3
s2
s4
m4={(p0,0),(p1,2),(p2,0),(p3,0)}
c0=$[\#\ 2\ 2]^T$

Timed Petri Nets

Ramchandani74 e Zuberek87

Disparo em três fases. Duração. “Transição em disparo”

Infinite-server semantics

Veremos Zuberek87 (adota semântica de Passos)

Timed Petri Nets

Inp(p) = •p, Out(p)= p•, Inp(t)= •t, Out(t)=t•
Inh(t) = O conjunto de lugares inibidores de t

Um lugar p é free-choice, se, e somente se,
$\forall$ti,tj $\in$ Out(p): Inp(ti) = Inp(tj) $\wedge$inh(ti)=inh(tj).

Um lugar é guardado (*guarded)* se, e somente se,
$\forall$ti,tj $\in$ Out(p), $\exists$pk $\in$ P: pk $\in$ Inp(ti) $\wedge$ pk $\in$ Inh(tj)
$\vee$ pk $\in$ Inp(tj) $\wedge$ pk $\in$ Inh(ti)

Timed Petri Nets

$\mathbb{T}$ = (P,T,A,w,m0,c,f) , Timed Petri net

- P – Conjunto de lugares
- T – Conjunto de transições
- A $\subseteq$ (P x T) $\cup$ (T x P), Conjunto de arcos
- w:A$\rightarrow\aleph$,Peso dos arcos
- m0:P $\rightarrow\aleph$, marcação inicial

Free-choice Petri net: cada lugar é free-choice ou guarded
Partição de T em diferentes classes: Free(T) ={T1,T2,...,Tk}

- c:T$\rightarrow$0≤$\Re$≤1, função de probabilidade de escolha, tal que

$$\forall(T_i \in Free(T)) \sum_{t \in T_i} c(t) = 1$$

Timed Petri Nets

$\mathbb{T}$ = (P,T,A,w,m0,c,f) , Timed Petri net

- f: T $\rightarrow \Re^+ \cup$ {0} – Duração

$t_k \in En(m_i)$

$$\forall(p \in P)\; m_j(p) = \begin{cases} m_i(p) - w(p,t_k), & \text{if } p \in Inp(t_k) - Out(t_k), \\ m_i(p) + w(t_k,p), & \text{if } p \in Out(t_k) - Inp(t_k), \\ m_i(p) - w(p,t_k) + w(t_k,p), & \text{if } p \in Inp(t_k) \cap Out(t_k), \\ m_i(p), & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Timed Petri Nets

A selection function of a marking m in a net $\mathbf{N}$ is any function $g : T \to \{0, 1, ...\}$ such that:

- there exists a sequence of intermediate markings $(m_{i_1} m_{i_2} ... m_{i_k})$ and a corresponding sequence of transitions $\sigma = (t_{i_1} t_{i_2} ... t_{i_k})$ such that $m = m_{i_0}$, and $t_{i_j} \in En(m_{i_{j-1}})$ for all $1 \leq j \leq k$, where

$$\forall (p \in P)\ m_{i_j}(p) = m_{i_{j-1}}(p) - \begin{cases} w(p, t_{i_j}), & \text{if } p \in Inp(t_{i_j}), \\ 0, & \text{otherwise;} \end{cases}$$

- the set of transitions enabled by m_{i_k} is empty, and
- for all $t \in T$, $g(t)$ is equal to the number of occurrences of t in the sequence σ

The set of all selection functions of a marking m is denoted by $Sel(m)$.

Timed Petri Nets

s=(m,n,r) é um estado de uma TPN $\mathbf{T}$:

- m:P $\to \aleph$, é uma função de marcação
- n:T $\to \aleph$, *firing-ranking function* – função que indica o número de vezes que uma transição dispara naquele estado
- r(ti): $(\Re^+ \cup \{0\})^{|k|}$, vetor que associa a cada disparo de t_i um numero real que representa *remaining firing time* disparo de t_i naquele estado. K é o número de vezes que t_i está sendo disparada em s (i.e., $n(t_i)=k$). Os valores do vetor são crescentes: r(ti)[1]<r(t)[2]<...<r(t)[k].

Timed Petri Nets

$s_i=(m_i,n_i,r_i)$ é o estado inicial (pode haver vários para uma free-choice net)

Escolhendo $n_i \in$ Sel(m0)

$$\forall (t \in T)\ r_i(t)[k] = \begin{cases} f(t), & \text{if } n_i(t) > 0 \wedge 1 \leq k \leq n_i(t), \\ \text{undefined}, & \text{otherwise;} \end{cases}$$

$$\forall (p \in P)\ m_i(p) = m_0(p) - \sum_{t \in Out(p)} w(p,t) * n_i(t).$$

Timed Petri Nets

$s_j=(m_j,n_j,r_j)$ é diretamente alcançado por $s_i=(m_i,n_i,r_i)$, satisfazendo as seguintes condições:

1. $h_i \ = \min\limits_{t \in T \wedge n_i(t) > 0} (r_i(t)[1])$
2. $\forall (t \in T)\ d_i(t) \ = \begin{cases} z, & \text{if } n_i(t) \geq z \wedge \forall (1 \leq \ell \leq z)\ r_i(t)[\ell] = h_i, \\ 0, & \text{otherwise;} \end{cases}$
3. $\forall (p \in P)\ m'_i(p) \ = \ m_i(p) \ + \sum\limits_{t \in Inp(p)} w(t,p) * d_i(t)$
4. $g_k \in Sel(m'_i)$
5. $\forall (p \in P)\ m_j(p) \ = \ m'_i(p) \ - \sum\limits_{t \in Out(p)} w(p,t) * g_k(t)$
6. $\forall (t \in T)\ n_j(t) \ = \ n_i(t) \ - \ d_i(t) \ + \ g_k(t)$
7. $\forall (t \in T)\ r_j(t)[\ell] \ = \begin{cases} r_i(t)[\ell + d_i(t)] - h_i, & \text{if } 1 \leq \ell \leq n_i(t) - d_i(t), \\ f(t), & \text{if } n_i(t) - d_i(t) < \ell \leq n_j(t) \end{cases}$

Timed Petri Nets

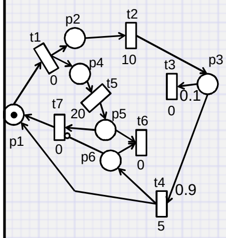
Grafo de alcançabilidade G=(V,D,h,q) de uma TPN $\mathbf{T}$

- V é conjunto de vértices, V=S(T) (conjunto de estados de T)
- D é o conjunto dos arcos dirigidos, D $\subset$ V x V. (si,sj) $\in$ D, se, e somente se, é diretamente alcançável por si.
- Associa o *holding time* a cada estado

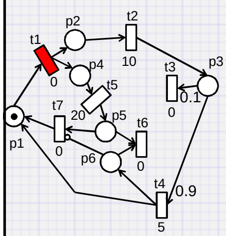
$$h(s_i) \;=\; \min_{t \in T \wedge n_i(t) > 0} (r_i(t)[1])$$

- q:D$\rightarrow$[0,1] é uma função que associa uma probabilidade aos arcos do grafo

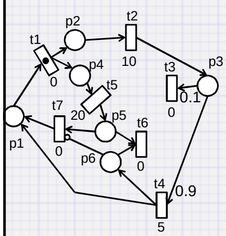
Exemplo



Exemplo



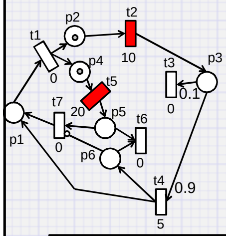
Exemplo



si	mi	ni	h(si)	gk	sj	q(si,sj)
1	todos 0	t1=1				

Marcações intermediárias:
m1'(p2)=1
m1'(p4)=1

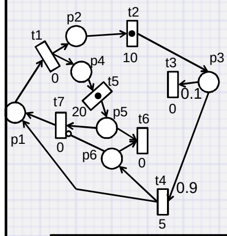
Exemplo



si	mi	ni	h(si)	gk	sj	q(si,sj)
1	todos 0	t1=1	0	t2=1,t5=1	2	1

Marcações intermediárias:
m1'(p2)=1
m1'(p4)=1

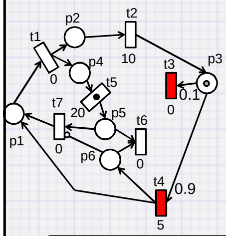
Exemplo



si	mi	ni	h(si)	gk	sj	q(si,sj)
1	todos 0	t1=1	0	t2=1,t5=1	2	1
2	todos 0	t2=1,t5=1	10			

r_{s2}(t2)[1]=10
r_{s2}(t5)[1]=20

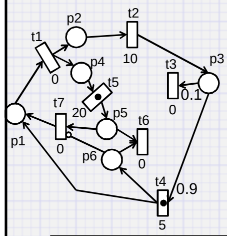
Exemplo



si	mi	ni	h(si)	gk	sj	q(si,sj)
1	todos 0	t1=1	0	t2=1,t5=1	2	1
2	todos 0	t2=1,t5=1	10	t4=1	3	0.9
				t3=1	4	0.1

r_{s2}(t2)[1]=10
r_{s2}(t5)[1]=20 (subtrair 10)
Marcações intermediárias:
m2'(p3)=1

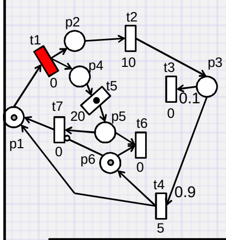
Exemplo



si	mi	ni	h(si)	gk	sj	q(si,sj)
1	todos 0	t1=1	0	t2=1,t5=1	2	1
2	todos 0	t2=1,t5=1	10	t4=1	3	0.9
				t3=1	4	0.1
3	todos 0	t4=1,t5=1	5	t1=1	5	1

r_{s3}(t4)[1]=5
r_{s3}(t5)[1]=10

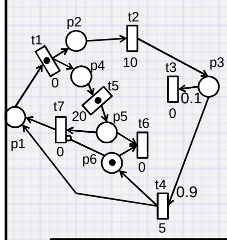
Exemplo



si	mi	ni	h(si)	gk	sj	q(si,sj)
1	todos 0	t1=1	0	t2=1,t5=1	2	1
2	todos 0	t2=1,t5=1	10	t4=1	3	0.9
				t3=1	4	0.1
3	todos 0	t4=1,t5=1	5	t1=1	5	1

$r_{s3}(t4)[1]=5$
$r_{s3}(t5)[1]=10$ (subtrair 5)
Marcações intermediárias:
m2'(p1)=1
m2'(p6)=1

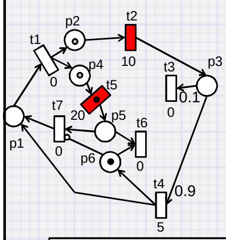
Exemplo



si	mi	ni	h(si)	gk	sj	q(si,sj)
1	todos 0	t1=1	0	t2=1,t5=1	2	1
2	todos 0	t2=1,t5=1	10	t4=1	3	0.9
				t3=1	4	0.1
3	todos 0	t4=1,t5=1	5	t1=1	5	1
4	todos 0	t3=1,t5=1	0	-	6	1
5	p6=1	t1=1,t5=1	0			

$r_{s5}(t1)[1]=0$
$r_{s5}(t5)[1]=5$

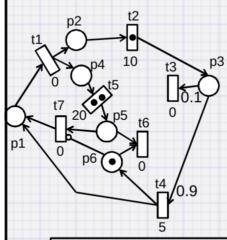
Exemplo



si	mi	ni	h(si)	gk	sj	q(si,sj)
1	todos 0	t1=1	0	t2=1,t5=1	2	1
2	todos 0	t2=1,t5=1	10	t4=1	3	0.9
				t3=1	4	0.1
3	todos 0	t4=1,t5=1	5	t1=1	5	1
4	todos 0	t3=1,t5=1	0	-	6	1
5	p6=1	t1=1,t5=1	0	t2=1,t5=1	7	1

$r_{s5}(t1)[1]=0$
$r_{s5}(t5)[1]=5$ (subtrair 0)
Marcações intermediárias:
m2'(p2)=1
m2'(p4)=1

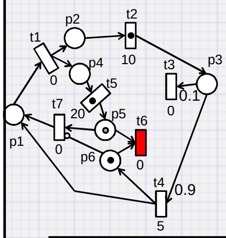
Exemplo



si	mi	ni	h(si)	gk	sj	q(si,sj)
1	todos 0	t1=1	0	t2=1,t5=1	2	1
2	todos 0	t2=1,t5=1	10	t4=1	3	0.9
				t3=1	4	0.1
3	todos 0	t4=1,t5=1	5	t1=1	5	1
4	todos 0	t3=1,t5=1	0	-	6	1
5	p6=1	t1=1,t5=1	0	t2=1,t5=1	7	1
6	todos 0	t5,=1	10	t7=1	8	1
7	p6=1	t2=1,t5=2	5			

$r_{s7}(t2)[1]=10$
$r_{s7}(t5)[1]=5$
$r_{s7}(t5)[2]=20$

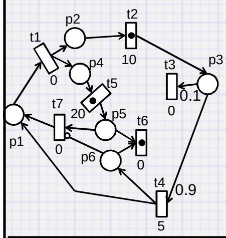
Exemplo



si	mi	ni	h(si)	gk	sj	q(si,sj)
1	todos 0	t1=1	0	t2=1,t5=1	2	1
2	todos 0	t2=1,t5=1	10	t4=1	3	0.9
				t3=1	4	0.1
3	todos 0	t4=1,t5=1	5	t1=1	5	1
4	todos 0	t3=1,t5=1	0	-	6	1
5	p6=1	t1=1,t5=1	0	t2=1,t5=1	7	1
6	todos 0	t5,=1	10	t7=1	8	1
7	p6=1	t2=1,t5=2	5	g6=1	9	1

r_{s7}(t2)[1]=10 (subtrair 5)
r_{s7}(t5)[1]=5
r_{s7}(t5)[2]=20 (subtrair 5)
Marcações Intermediárias:
m2'(p5)=1
m2'(p6)=1

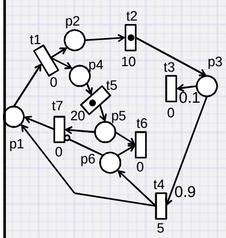
Exemplo



si	mi	ni	h(si)	gk	sj	q(si,sj)
1	todos 0	t1=1	0	t2=1,t5=1	2	1
2	todos 0	t2=1,t5=1	10	t4=1	3	0.9
				t3=1	4	0.1
3	todos 0	t4=1,t5=1	5	t1=1	5	1
4	todos 0	t3=1,t5=1	0	-	6	1
5	p6=1	t1=1,t5=1	0	t2=1,t5=1	7	1
6	todos 0	t5,=1	10	t7=1	8	1
7	p6=1	t2=1,t5=2	5	g6=1	9	1
8	todos 0	t7=1	0	g1=1	1	1
9	todos 0	t2=t5=t6=1	0	-	10	1

r_{s9}(t2)[1]=5
r_{s9}(t5)[1]=15
r_{s9}(t6)[1]=0

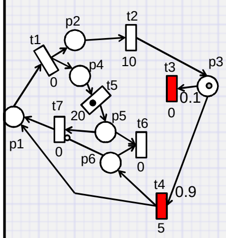
Exemplo



si	mi	ni	h(si)	gk	sj	q(si,sj)
1	todos 0	t1=1	0	t2=1,t5=1	2	1
2	todos 0	t2=1,t5=1	10	t4=1	3	0.9
				t3=1	4	0.1
3	todos 0	t4=1,t5=1	5	t1=1	5	1
4	todos 0	t3=1,t5=1	0	-	6	1
5	p6=1	t1=1,t5=1	0	t2=1,t5=1	7	1
6	todos 0	t5,=1	10	t7=1	8	1
7	p6=1	t2=1,t5=2	5	g6=1	9	1
8	todos 0	t7=1	0	g1=1	1	1
9	todos 0	t2=t5=t6=1	0	-	10	1
10	todos 0	t2=1,t5=1	5			

r_{s10}(t2)[1]=5
r_{s10}(t5)[1]=15

Exemplo



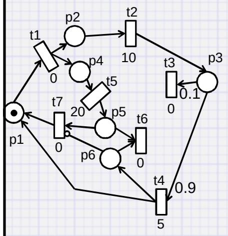
si	mi	ni	h(si)	gk	sj	q(si,sj)
1	todos 0	t1=1	0	t2=1,t5=1	2	1
2	todos 0	t2=1,t5=1	10	t4=1	3	0.9
				t3=1	4	0.1
3	todos 0	t4=1,t5=1	5	t1=1	5	1
4	todos 0	t3=1,t5=1	0	-	6	1
5	p6=1	t1=1,t5=1	0	t2=1,t5=1	7	1
6	todos 0	t5,=1	10	t7=1	8	1
7	p6=1	t2=1,t5=2	5	g6=1	9	1
8	todos 0	t7=1	0	g1=1	1	1
9	todos 0	t2=t5=t6=1	0	-	10	1
10	todos 0	t2=1,t5=1	5	t4=1	3	0.9
				t3=1	4	0.1

r_{s10}(t2)[1]=5
r_{s10}(t5)[1]=15 (subtrair 5)
Marcações Intermediárias:
m10'(p3)=1

Tempo de Execução

- Análise do grafo de estados + Algoritmo de procura de caminhos (Redes Genéricas)
- Métodos estruturais

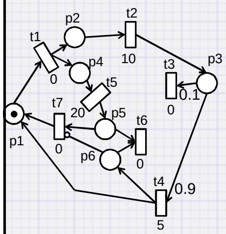
Exemplo



si	mi	ni	h(si)	gk	sj	q(si,sj)
1	todos 0	t1=1	0	t2=1,t5=1	2	1
2	todos 0	t2=1,t5=1	10	t4=1	3	0.9
				t3=1	4	0.1
3	todos 0	t4=1,t5=1	5	t1=1	5	1
4	todos 0	t3=1,t5=1	0	-	6	1
5	p6=1	t1=1,t5=1	0	t2=1,t5=1	7	1
6	todos 0	t5,=1	10	t7=1	8	1
7	p6=1	t2=1,t5=2	5	g6=1	9	1
8	todos 0	t7=1	0	g1=1	1	1
9	todos 0	t2=t5=t6=1	0	-	10	1
10	todos 0	t2=1,t5=1	5	t4=1	3	0.9
				t3=1	4	0.1

Qual é o menor caminho s1 até s5?

Exemplo



si	mi	ni	h(si)	gk	sj	q(si,sj)
1	todos 0	t1=1	0	t2=1,t5=1	2	1
2	todos 0	t2=1,t5=1	10	t4=1	3	0.9
				t3=1	4	0.1
3	todos 0	t4=1,t5=1	5	t1=1	5	1
4	todos 0	t3=1,t5=1	0	-	6	1
5	p6=1	t1=1,t5=1	0	t2=1,t5=1	7	1
6	todos 0	t5,=1	10	t7=1	8	1
7	p6=1	t2=1,t5=2	5	g6=1	9	1
8	todos 0	t7=1	0	g1=1	1	1
9	todos 0	t2=t5=t6=1	0	-	10	1
10	todos 0	t2=1,t5=1	5	t4=1	3	0.9
				t3=1	4	0.1

D(s1,s5)=0 + 10 + 5 + 0= 15

Timed Petri Nets - INA

T = (P,T,F,W,m0,D) , Timed Petri net

- P – Conjunto de lugares
- T – Conjunto de transições
- F $\subseteq$ (P x T) $\cup$ (T x P), Conjunto de arcos
- W:A$\rightarrow\aleph$,Peso dos arcos
- D:T $\rightarrow\aleph$, Duração da transição

Adota semântica de passos com single-server firing semantics

Timed Petri Nets - INA

$S \subseteq (M,A)$ conjunto de todos os estados, onde

- $M \subseteq (P \times \aleph)$: conjunto de marcações
- $A \subseteq (T \times \aleph)$: conjunto das durações (tempo) restantes de disparo das transições

Um estado $s \in S$ é uma tupla $s = (m,a)$, no qual *m* $\in$ M é a marcação e *a* $\in$ A a duração restante das transições em disparo.

Se $a(t) = 0$, a transição t não está disparando no estado s

s0 = (m0,$\underline{0}$) é a marcação inicial. $\underline{0}(t) = 0, \forall t \in T$

Timed Petri Nets - INA

$U \subseteq T$ é um passo máximo no estado s=(m,a), se e somente se:

- $\forall t \in U, \quad a(t) = 0$;
- $\forall p \in P, m(p) >= \sum_{t \in U} W(p,t)$
- U = {}**: (i)**$\forall t \in ET(m), a(t) >= 0$**;** ou **(ii)**$\forall t \in T$, ET(m) = {} e $a(t) >= 0$**,**
- $\nexists$ U' satisfazendo as condições acima, tal que $U \subset U'$

Conjunto de transições habilitadas:

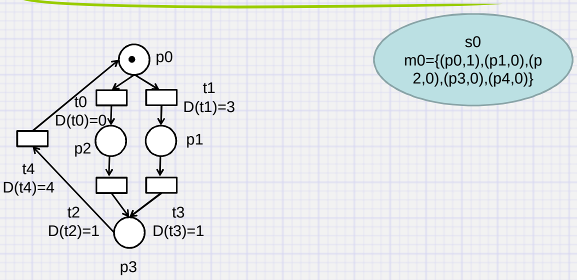
$ET(m) = \{t \mid m(p) >= W(p,t)\}, \forall p \in P$

Timed Petri Nets - INA

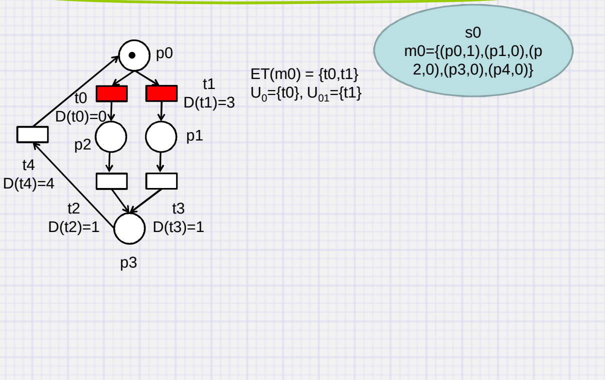
Assuma o estado s=(m,a) e U um passo máximo em s. O estado s'=(m',a') é alcançado devido ao disparo de U em s, da seguinte forma:

- $\Theta = \min(1,D(t)), \forall t \in U$
- $m'(p) = m(p) - \sum_{t \in U} W(p,t) + \sum_{t \in U \wedge D(t)=\Theta} W(t,p) + \sum_{a(t)>0 \wedge a(t)=\Theta} W(t,p), \forall p \in P$
- $a'(t) = \begin{cases} D(t) - \Theta, \text{ if } t \in U \\ a(t) - \Theta, \text{ if } t \notin U \wedge a(t) > 0 \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$

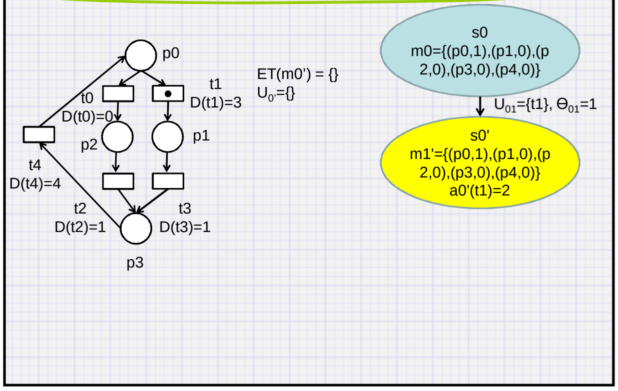
Timed Petri Nets - INA



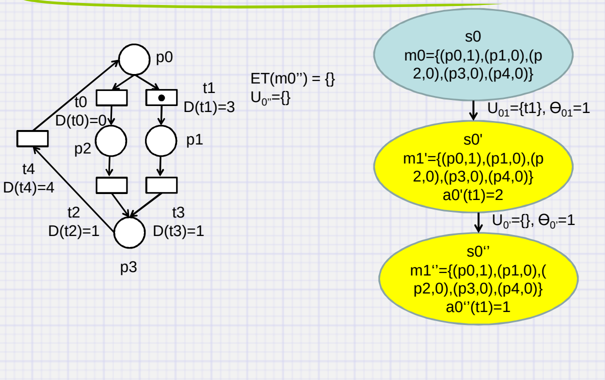
Timed Petri Nets - INA



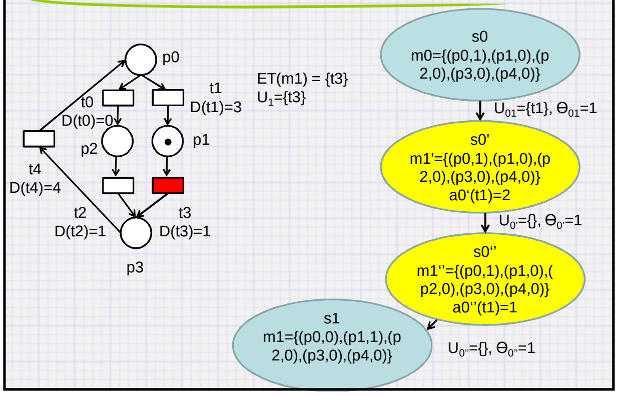
Timed Petri Nets - INA

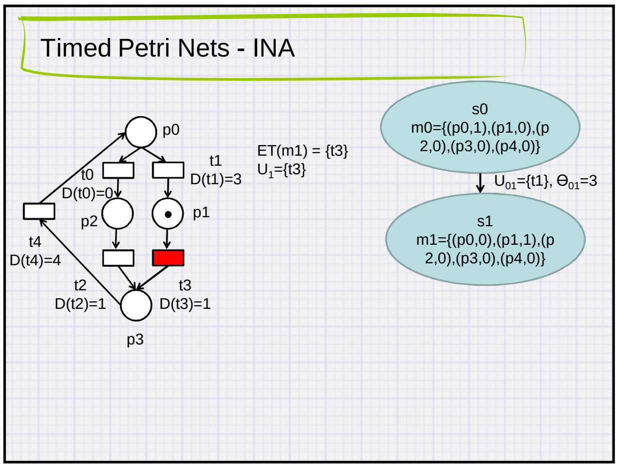


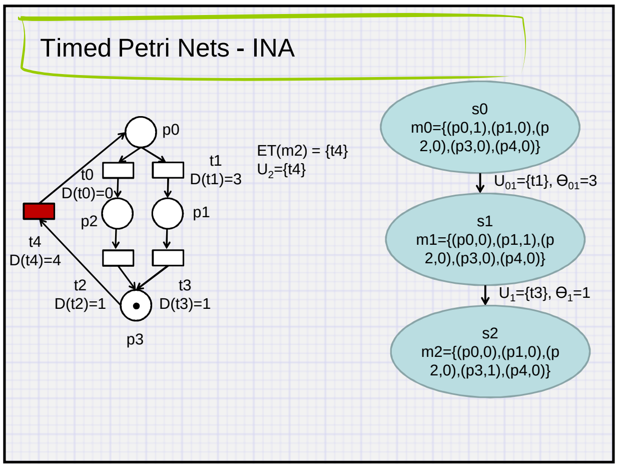
Timed Petri Nets - INA

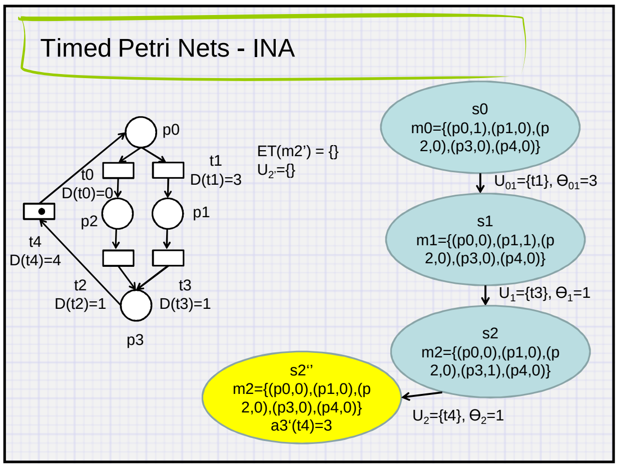


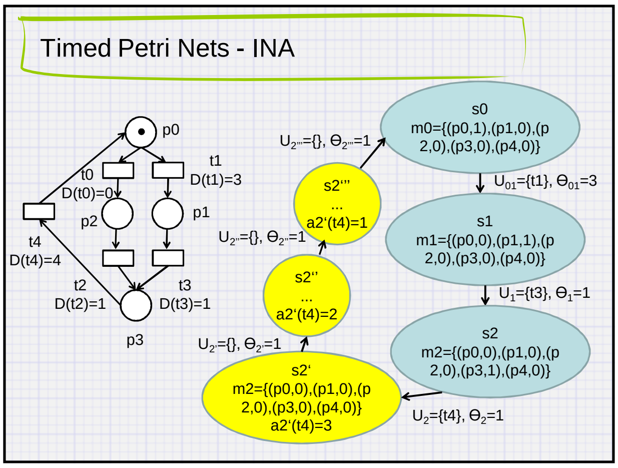
Timed Petri Nets - INA



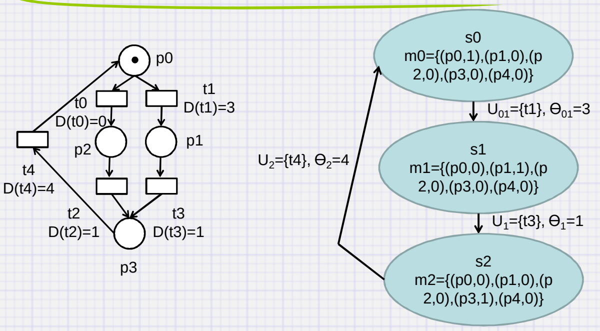

Timed Petri Nets - INA
p0
t1
D(t1)=3
t0
D(t0)=0
p2
p1
t4
D(t4)=4
t2
D(t2)=1
t3
D(t3)=1
p3
ET(m1) = {t3}
U_1={t3}
s0
m0={(p0,1),(p1,0),(p
2,0),(p3,0),(p4,0)}
U_{01}={t1}, Θ_{01}=3
s1
m1={(p0,0),(p1,1),(p
2,0),(p3,0),(p4,0)}


Timed Petri Nets - INA
p0
t1
D(t1)=3
t0
D(t0)=0
p2
p1
t4
D(t4)=4
t2
D(t2)=1
t3
D(t3)=1
p3
ET(m2) = {t4}
U_2={t4}
s0
m0={(p0,1),(p1,0),(p
2,0),(p3,0),(p4,0)}
U_{01}={t1}, Θ_{01}=3
s1
m1={(p0,0),(p1,1),(p
2,0),(p3,0),(p4,0)}
U_1={t3}, Θ_1=1
s2
m2={(p0,0),(p1,0),(p
2,0),(p3,1),(p4,0)}

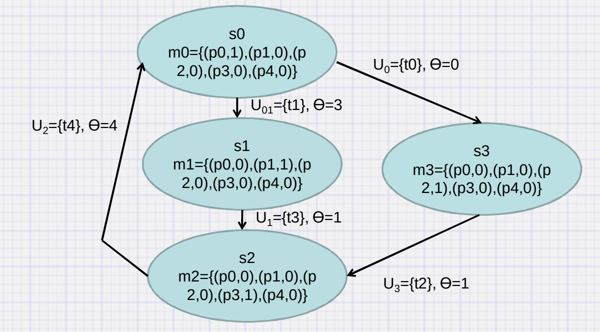

Timed Petri Nets - INA
p0
t1
D(t1)=3
t0
D(t0)=0
p2
p1
t4
D(t4)=4
t2
D(t2)=1
t3
D(t3)=1
p3
ET(m2') = {}
$U_{2'}$={}
s0
m0={(p0,1),(p1,0),(p
2,0),(p3,0),(p4,0)}
U_{01}={t1}, Θ_{01}=3
s1
m1={(p0,0),(p1,1),(p
2,0),(p3,0),(p4,0)}
U_1={t3}, Θ_1=1
s2
m2={(p0,0),(p1,0),(p
2,0),(p3,1),(p4,0)}
s2''
m2={(p0,0),(p1,0),(p
2,0),(p3,0),(p4,0)}
a3'(t4)=3
U_2={t4}, Θ_2=1


Timed Petri Nets - INA
p0
t1
D(t1)=3
t0
D(t0)=0
p2
p1
t4
D(t4)=4
t2
D(t2)=1
t3
D(t3)=1
p3
$U_{2'''}$={}, $\Theta_{2'''}$=1
s2'''
...
a2'(t4)=1
$U_{2''}$={}, $\Theta_{2''}$=1
s2''
...
a2'(t4)=2
$U_{2'}$={}, $\Theta_{2'}$=1
s2'
m2={(p0,0),(p1,0),(p
2,0),(p3,0),(p4,0)}
a2'(t4)=3
s0
m0={(p0,1),(p1,0),(p
2,0),(p3,0),(p4,0)}
U_{01}={t1}, Θ_{01}=3
s1
m1={(p0,0),(p1,1),(p
2,0),(p3,0),(p4,0)}
U_1={t3}, Θ_1=1
s2
m2={(p0,0),(p1,0),(p
2,0),(p3,1),(p4,0)}
U_2={t4}, Θ_2=1

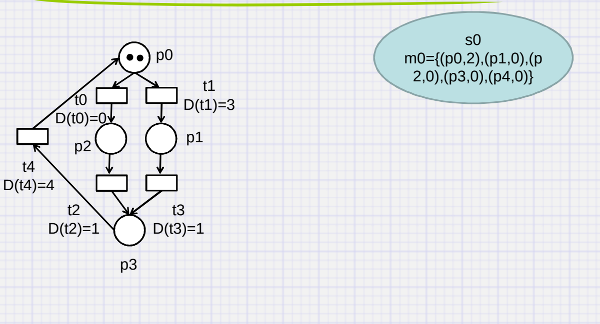
Timed Petri Nets - INA



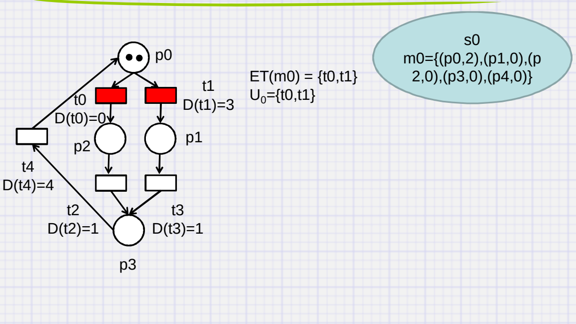
Timed Petri Nets - INA



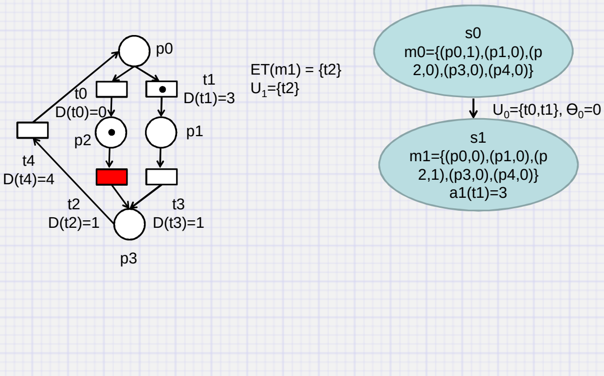
Timed Petri Nets - INA



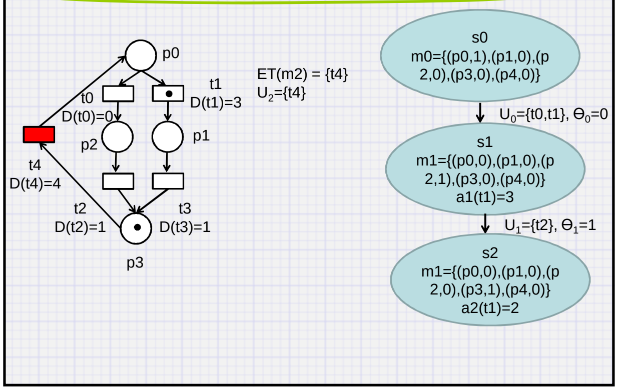
Timed Petri Nets - INA



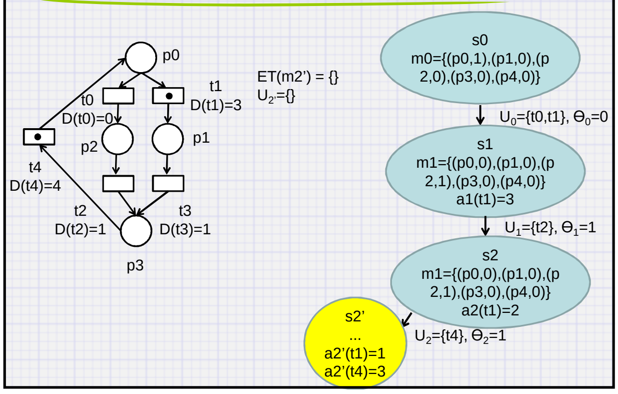
Timed Petri Nets - INA



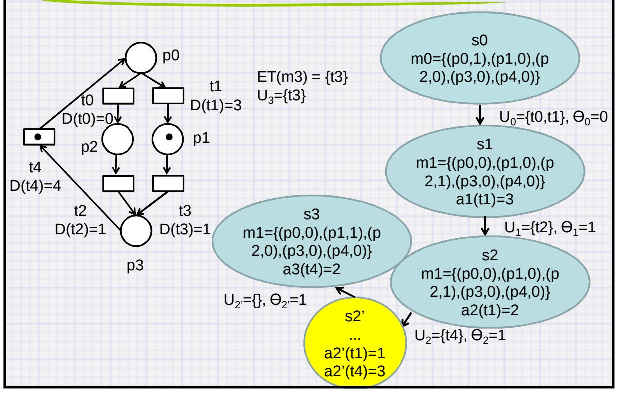
Timed Petri Nets - INA



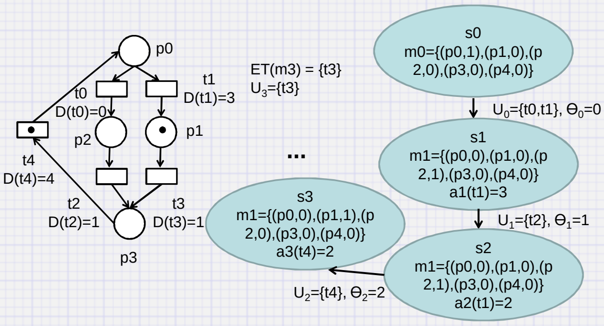
Timed Petri Nets - INA



Timed Petri Nets - INA



Timed Petri Nets - INA



Timed Petri Nets - INA

Assuma o estado s=(m,a) e U um passo máximo em s. O estado s'=(m',a') é alcançado devido ao disparo de U em s, da seguinte forma: **<u>(evitando os estados transientes)</u>**

Delay = $\{D(t) \mid t \in U\} \cup \{a(t) \mid a(t) > 0\}$

- Θ = min(Delay), $ET(s') \neq \{\} \vee (ET(s')=\{\} \wedge \forall t \in T, a'(t)=0)$
- $m'(p) = m(p) - \sum_{t \in U} W(p,t) + \sum_{t \in U \wedge D(t)<=\Theta} W(t,p) + \sum_{a(t)>0 \wedge a(t)<=\Theta} W(t,p), \forall p \in P$
- $a'(t) = \begin{cases} D(t) - \Theta, \text{ if } t \in U \wedge D(t) > \Theta \\ a(t) - \Theta, \text{ if } t \notin U \wedge a(t) > \Theta \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$

Leitura

F. D. J. Bowden. A Brief Survey and Synthesis of the Roles of Time in Petri Nets. *Mathematical and Computter Modelling,* 2000.

E. Tavares. Software Synthesis for Energy-Constrained Hard Real-Time Systems, 2009.

W. Zuberek. Timed Petri Nets: Definitions, Properties and Applications. Microelectronics and Reliability, 1991

Zeugmann and et al. Worst-case Analysis of Concurrent Systems with Duration Interval Petri Nets. Informatik-Bericht,1997.

Leitura

B. Berthomieu and M. Diaz. Modeling and Verification of Time Dependent Systems Using Time Petri Nets. IEEE Trans. Software Engineering, 1991.

N. Leveson e J. Stolzy. Safety Analysis Using Petri Nets. IEEE Trans. Software Engineering, 1987.

Redes de Petri Coloridas (CPN)

Redes de Petri + Linguagem de Programação

Redes de Petri com:
- Tipos de Dados
- Modularidade

High-level Petri Net e Hierarchical Petri Net

Modelos sucintos e estruturados para determinadas situações

Token “carrega” um dado de um determinado tipo

Redes de Petri Coloridas (CPN)

Coloured por razões históricas:
- *Colour set* = Tipo
- *Token Colour* = *Token Value*

Possuem mesmo poder de expressividade de PT-nets
- Uma pode ser traduzida na outra
- Sem ganho teórico

Adoção da linguagem funcional ML (para a CPN considerada)

Técnicas de análise: grafo de alcançabilidade, invariantes, etc.

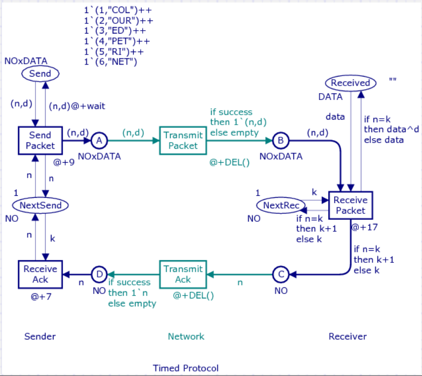
Redes de Petri Coloridas Temporizadas (TCPN)

Importância do tempo para avaliação de desempenho/dependabilidade de sistemas

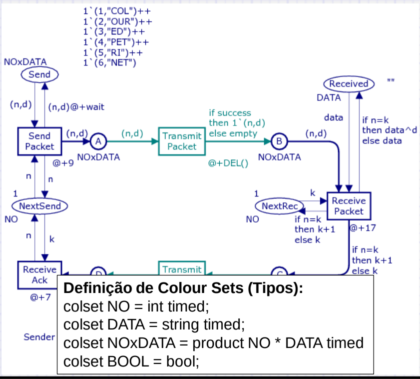
Modelagem de sistemas de tempo real

Conceitos
- Tempos associados às marcações(tokens)
- Adoção de um relógio global (global clock)
- O *timestamp* associado à marcação indica quando a mesma está pronta para uso
- O disparo de uma transição é imediato
- *Timed multiset* e *timed colour sets*
- *Timestamp* $\in$ TIME (conjunto dos inteiros não negativos)

Exemplo

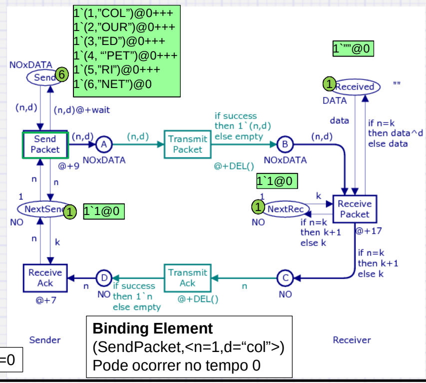


Exemplo



Definição de Colour Sets (Tipos):
colset NO = int timed;
colset DATA = string timed;
colset NOxDATA = product NO * DATA timed
colset BOOL = bool;

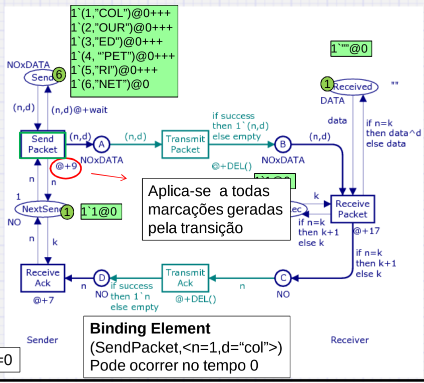
Exemplo



Global Clock=0

Binding Element
(SendPacket,<n=1,d="col">)
Pode ocorrer no tempo 0

Exemplo

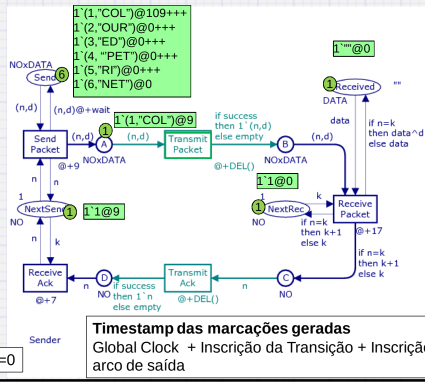


Aplica-se a todas marcações geradas pela transição

Global Clock=0

Binding Element
(SendPacket,<n=1,d="col">)
Pode ocorrer no tempo 0

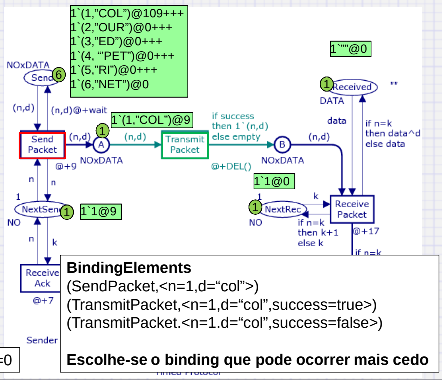
Exemplo



Global Clock=0

Timestamp das marcações geradas
Global Clock + Inscrição da Transição + Inscrição do arco de saída

Exemplo

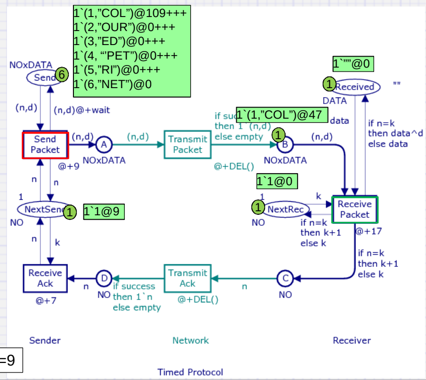


BindingElements
(SendPacket,<n=1,d="col">)
(TransmitPacket,<n=1,d="col",success=true>)
(TransmitPacket.<n=1.d="col",success=false>)

Escolhe-se o binding que pode ocorrer mais cedo

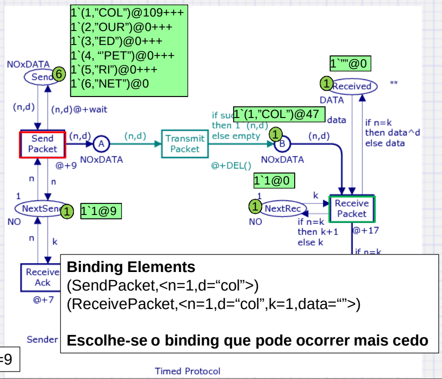
Global Clock=0

Exemplo



Global Clock=9

Exemplo

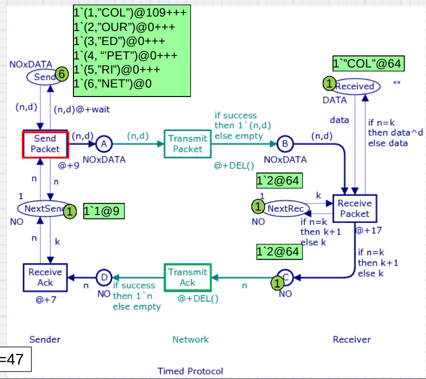


Binding Elements
(SendPacket,<n=1,d="col">)
(ReceivePacket,<n=1,d="col",k=1,data="">)

Escolhe-se o binding que pode ocorrer mais cedo

Global Clock=9

Exemplo

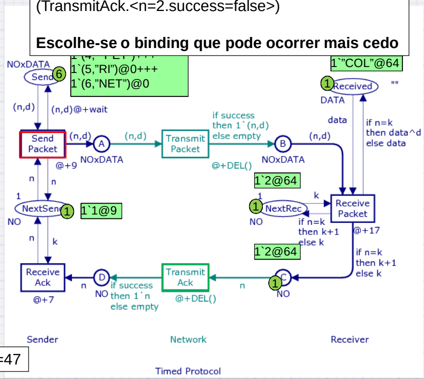


Global Clock=47

Exemplo

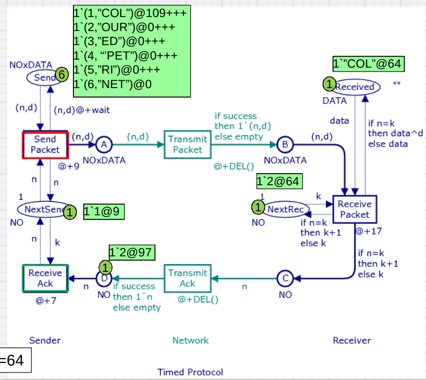
Binding Elements
(SendPacket,<n=1,d="col">)
(TransmitAck,<n=2,success=true>)
(TransmitAck.<n=2.success=false>)

Escolhe-se o binding que pode ocorrer mais cedo



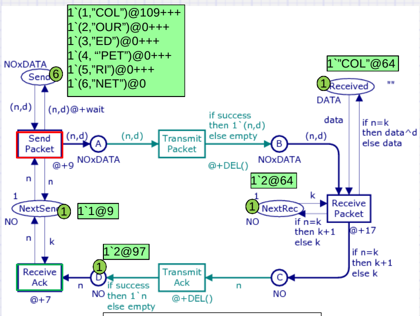
Global Clock=47

Exemplo



Global Clock=64

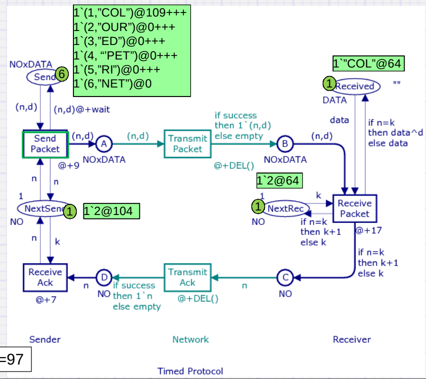
Exemplo



BindingElements
(SendPacket,<n=1,d="COL">)
(ReceiveAck,<n=2,k=1>)

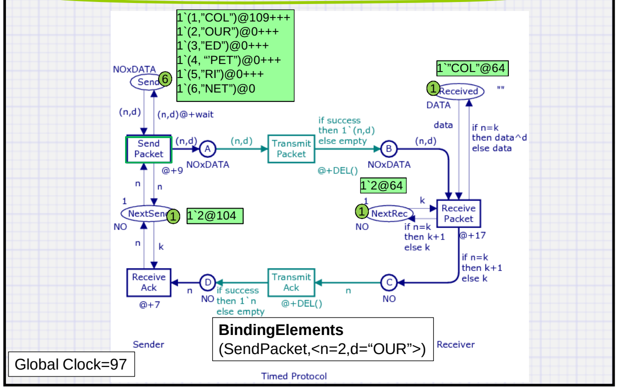
Global Clock=64

Exemplo

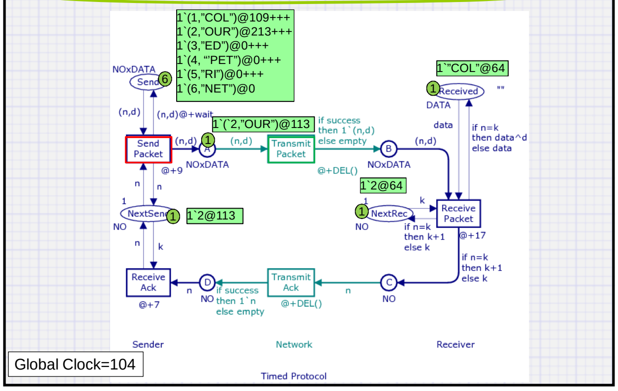


Global Clock=97

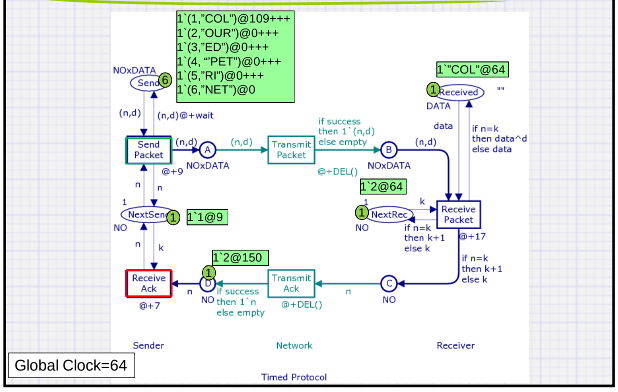
Exemplo



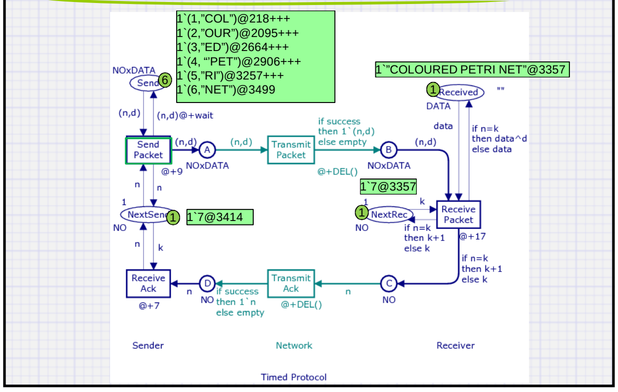
Exemplo



Exemplo (Retransmissão)



Exemplo (Dead Marking)



Leitura

Kurt Jensen e Lars Kristensen. Coloured Petri Nets: Modelling and Validation of Concurrent Systems. Springer, 2009.