

# Gráficos de Controle (X, R, S, CUSUM e EWMA)

**Alunos:**

Ahyalla Riceli  
Anderson Elias

**Professor:**

Paulo Maciel  
Ricardo Massa

## Roteiro

- Introdução
- Gráficos de Controle
- CEP – Controle Estatístico de Processo
- Gráfico de Shewhart
- Princípios Básicos
- Gráficos X e R
- Gráficos X e S
- Gráficos CUSUM
- Gráficos EWMA

## Introdução

- Com o objetivo de satisfazer as requisições do cliente, um produto deve ser fruto de um processo estável ou replicável.
- O processo deve ser apropriado para ser executado com uma pequena versatilidade por volta das dimensões-alvo das características de qualidade que devem ser atendidas.

## Gráficos de Controle

- O que são Gráficos de Controle?
  - Um tipo de gráfico utilizado para acompanhamento de um processo;
  - Determina estatisticamente uma faixa, denominada limites de controle.
    - Permitindo verificar se o processo está sob controle, ou seja, isento de causas especiais.

## Gráficos de Controle

- Porque usar de Gráficos de Controle? (Funções)
  - Mostram evidências de que um processo está operando em estado de controle estatístico;
  - Mantem o estado de controle estatístico estendendo as funções dos limites de controle como base de decisões;
  - Apresentam informações para que sejam tomadas ações gerenciais de melhoria dos processos.

## Gráficos de Controle

- Quando usar Gráficos de Controle?
  - Para verificar se o processo está sob controle, ou seja, dentro dos limites preestabelecidos;
  - Para controlar a variabilidade do processo, ou o grau de não conformidade.

## Gráficos de Controle

- Benefícios dos Gráficos de Controle:
  - Ao distinguir as causas especiais de variação e indicar se o problema é local ou merece atenção gerencial, auxilia a direcionar a solução de problemas.

## Gráficos de Controle

- Benefícios dos Gráficos de Controle:
  - Ao melhorar o processo os GC produzem:
    - Um aumento na porcentagem de produtos capazes de satisfazer os requisitos do cliente;
    - Diminuição de retrabalho;
    - Aumenta a probabilidade de produtos aceitáveis;
    - Adquire informações para melhoria do processo.

## Gráficos de Controle

- Desvantagens:
  - Tem que ser atualizados, ao longo do tempo, conforme o período mostrado no gráfico;
  - É genérico. Não há detalhes sobre a informação;
  - Tem que ter conhecimentos básicos de estatísticas para poder utilizar e escolher o tipo mais adequado para cada situação.

## CEP – Controle Estatístico do Processo

- **Controle:**
  - Manter algo dentro dos limites (padrões) ou fazer algo se comportar de forma adequada.
- **Estatístico**
  - Obter conclusões com base em dados e números.
- **Controle Estatístico**
  - Fazer com que se mantenha os resultados conforme os padrões com dados e números.
- **Processo**
  - Qualquer conjunto de condições ou conjunto de causas (sistema de causas) que trabalham simultaneamente para produzir um determinado resultado.

## CEP – Controle Estatístico do Processo

- **Controle Estatístico do Processo (CEP)** é um método preventivo de se comparar, continuamente, os resultados de um processo com os padrões, identificando a partir de dados estatísticos as tendências para variações significativas, a fim de eliminar/controlar essas variações. O objetivo principal no CEP é reduzir cada vez mais a variabilidade de um processo.

## CEP – Controle Estatístico do Processo

- Sete principais ferramentas:
  1. Apresentação em histogramas ou ramo-e-folhas;
  2. Folha de controle;
  3. Gráfico de Pareto;
  4. Diagrama de causa-e-efeito;
  5. Diagrama de concentração de defeito;
  6. Diagrama de dispersão;
  7. **Gráfico de controle.**

## CEP – Controle Estatístico do Processo

- **Objetivo:**

- Identificar a causa de eventos atribuídos a mudanças do processo;
- Eliminar a variabilidade do processo.

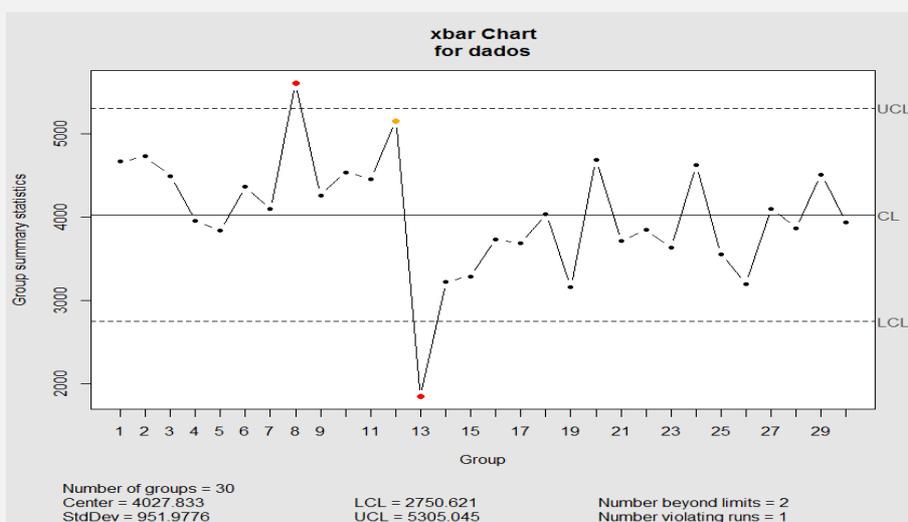
## Gráficos de Shewhart

- O gráfico de controle de Shewhart é, provavelmente, o mais sofisticado tecnicamente. Ele foi desenvolvido nos anos 20 pelo Dr. Walter A. Shewhart.
- Muito do desenvolvimento daquela época ainda é aplicado em muitas empresas atualmente.

## Princípios Básicos

- Os gráficos de controle típicos exibem 3 linhas paralelas ao eixo x:
  - Linha Superior (LSC): Representa o limite superior de controle;
  - Linha Central (LC): Representa o valor médio da qualidade exigida;
  - Linha Inferios (LSI): Representa o limite inferior de controle.

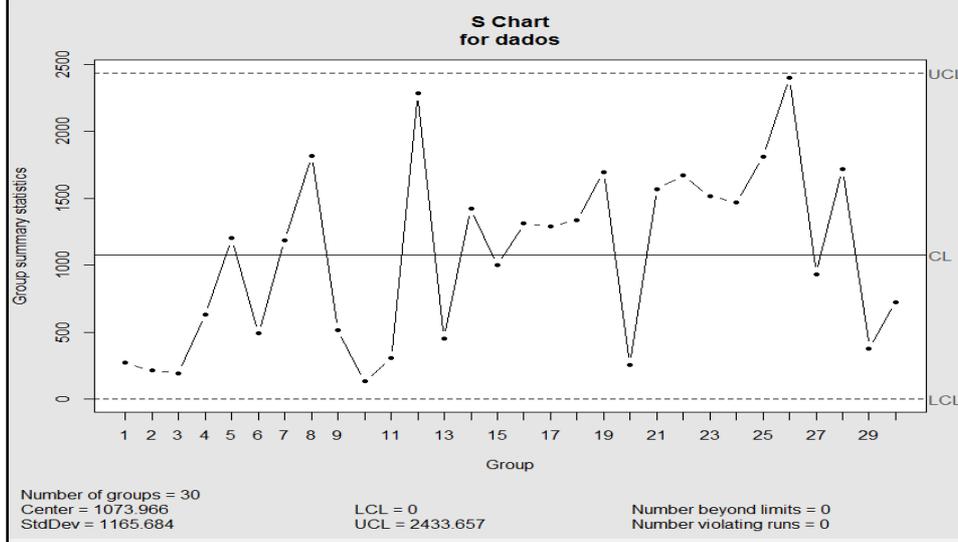
## Princípios Básicos



## Princípios Básicos

- Pontos fora dos limites;
- Processo fora de controle;
- Investigação;
- Ações corretivas;
- Eliminar causas atribuíveis.

## Princípios Básicos



## Princípios Básicos

- Pontos dentro dos limites;
- Comportamento não aleatório;
- Comportamento sistemático;
- Processo fora de controle.

## Gráficos de Controle

- Sua popularidade se deu:
  - Técnica que auxilia a melhoria do processo;
  - Eficaz na prevenção de defeitos;
  - Evita ajustes desnecessários no processo;
  - Proveem informações de diagnósticos;
  - Fornecem informações sobre capacidade.

## Gráficos de Controle

- Gráficos X e R
  - Utilizados para controlar e monitorar a média e a amplitude.
  - Também deve ocorrer sempre que uma característica da qualidade observada é expressa em unidades reais como peso em quilogramas, comprimento em centímetros, temperatura em graus celsius.

## Gráficos X e R

- Para obter os limites de controle do Gráfico X:

$$LSCX = \bar{\bar{X}} + A_2 * \bar{R}$$

$$LMCX = \bar{\bar{X}}$$

$$LICX = \bar{\bar{X}} - A_2 * \bar{R}$$

## Gráficos X e R

- Para obter os limites de controle do Gráfico R:

$$\begin{aligned}LSCR &= D_4 * \bar{R} \\LMCR &= \bar{R} \\LICR &= D_3 * \bar{R}\end{aligned}$$

## Gráficos X e R

$$\bar{\bar{X}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \bar{X}_i$$

Onde que  $\bar{X}_i$  é a média da i-ésima amostra para  $i = 1, 2, 3, 4, \dots, m$ .

## Gráficos X e R

$$\bar{R} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n R_i$$

Onde  $R_i$  é amplitude de  $i = 1, 2, 3, 4, \dots, m$ .

Os valores de **A2**, **D3** e **D4** são obtidos através da **tabela adequada** em função de  $n$ .

## Tabela de Constantes

Amostra Size = m	X-bar Gráfico Constantes		para sigma estimar	Gráfico Constantes R		Gráfico Constantes S	
	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	d <sub>2</sub>	D <sub>3</sub>	D <sub>4</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>
2	1,880	2,659	1,128	0	3,267	0	3,267
3	1,023	1,954	1,693	0	2,574	0	2,568
4	0,729	1,628	2,059	0	2,282	0	2,266
5	0,577	1,427	2,326	0	2,114	0	2,089
6	0,483	1,287	2,534	0	2,004	0,030	1,970
7	0,419	1,182	2,704	0,076	1,924	0,118	1,882
8	0,373	1,099	2,847	0,136	1,864	0,185	1,815
9	0,337	1,032	2,970	0,184	1,816	0,239	1,761
10	0,308	0,975	3,078	0,223	1,777	0,284	1,716
11	0,285	0,927	3,173	0,256	1,744	0,321	1,679
12	0,266	0,886	3,258	0,283	1,717	0,354	1,646
13	0,249	0,850	3,336	0,307	1,693	0,382	1,618
14	0,235	0,817	3,407	0,328	1,672	0,406	1,594
15	0,223	0,789	3,472	0,347	1,653	0,428	1,572
16	0,212	0,763	3,532	0,363	1,637	0,448	1,552
17	0,203	0,739	3,588	0,378	1,622	0,466	1,534
18	0,194	0,718	3,640	0,391	1,608	0,482	1,518
19	0,187	0,698	3,689	0,403	1,597	0,497	1,503
20	0,180	0,680	3,735	0,415	1,585	0,510	1,490
21	0,173	0,663	3,778	0,425	1,575	0,523	1,477
22	0,167	0,647	3,819	0,434	1,566	0,534	1,466
23	0,162	0,633	3,858	0,443	1,557	0,545	1,455
24	0,157	0,619	3,895	0,451	1,548	0,555	1,445
25	0,153	0,606	3,931	0,459	1,541	0,565	1,435

## Exemplo para Gráficos X e R

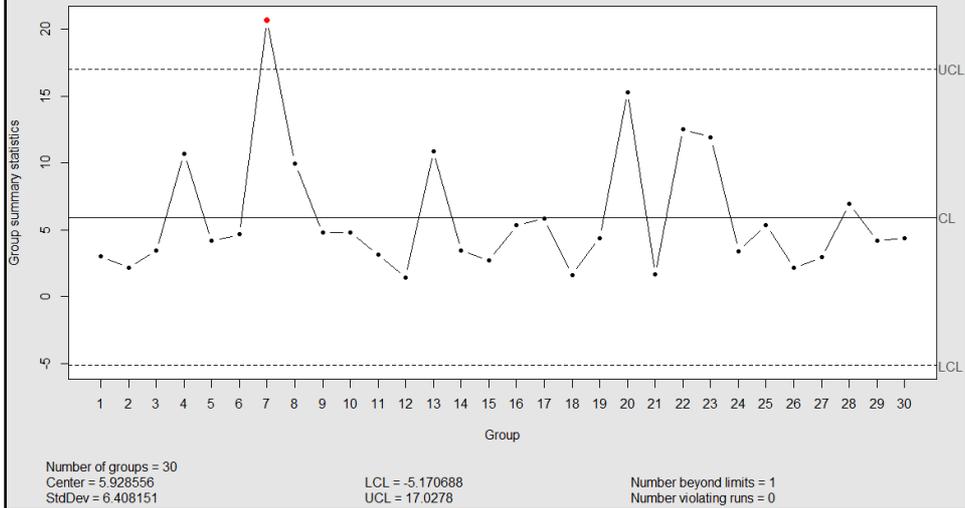
Análise de um **processo de produção de café** em sua fase final, onde há o empacotamento do produto através de máquinas automáticas do tipo Flex Bag, estão envolvidas no processo **3 máquinas**. Os dados foram colhidos durante **30 dias**, quando acreditava-se que o **processo estava sob controle**. Devido a existência de perda diária do produto, queremos saber a **variação** de perda durante essa produção usando **Gráficos de Controle**.

## Exemplo para Gráficos X e R

Nº Dias	Máquina 1	Máquina 2	Máquina 3				
1	0,250	1,000	5,300				
2	1,250	2,750	5,000				
3	0,500	1,250	8,500				
4	1,500	7,250	23,300				
5	0,250	0,250	12,000				
6	9,070	0,500	4,400				
7	24,500	29,700	7,800				
8	18,500	3,500	7,900				
9	0,250	2,250	11,800				
10	0,000	6,500	7,900				
11	0,000	9,000	0,500				
12	0,250	1,750	2,300				
13	28,000	0,000	4,600				
14	3,250	0,250	6,800				
15	0,750	3,000	4,400				
				16	5,000	0,500	10,500
				17	1,000	12,250	4,250
				18	1,400	3,000	0,500
				19	0,500	10,750	1,900
				20	31,900	8,750	5,300
				21	2,300	2,500	0,200
				22	7,250	10,500	19,900
				23	12,750	0,250	22,700
				24	9,750	0,250	0,200
				25	12,500	0,000	3,500
				26	1,500	2,500	2,400
				27	0,000	0,700	8,100
				28	4,000	16,750	0,000
				29	7,000	2,000	3,600
				30	10,200	2,750	0,200

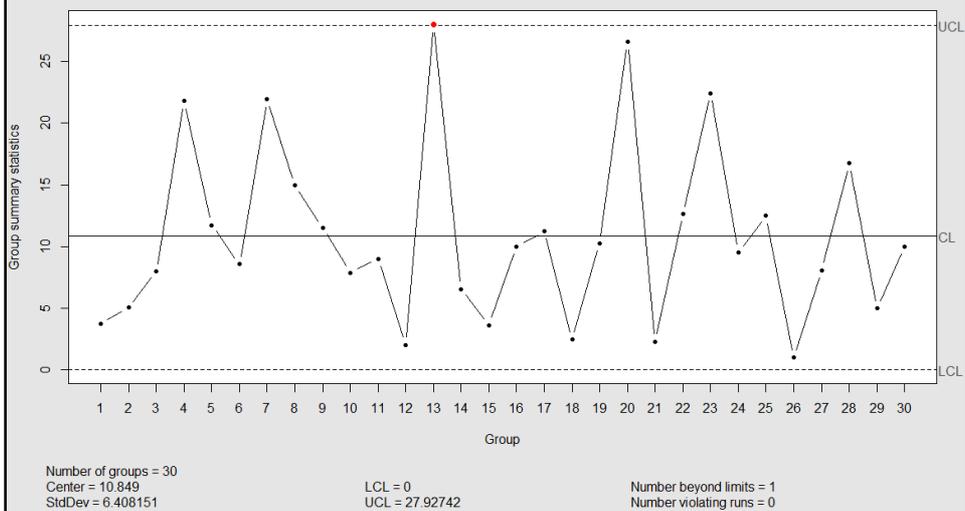
## Gráfico X

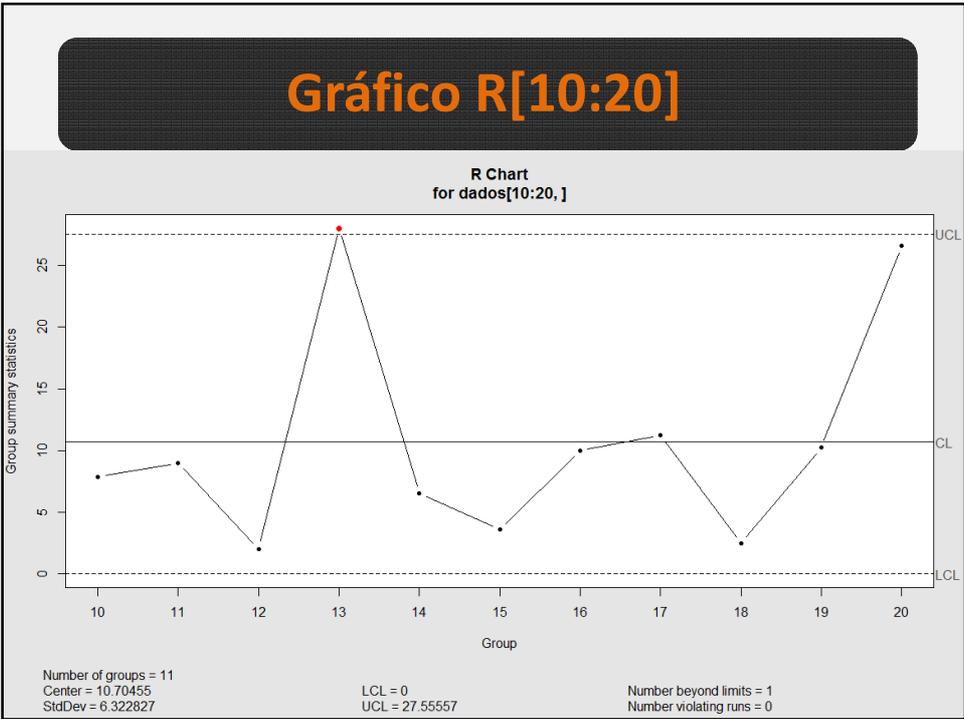
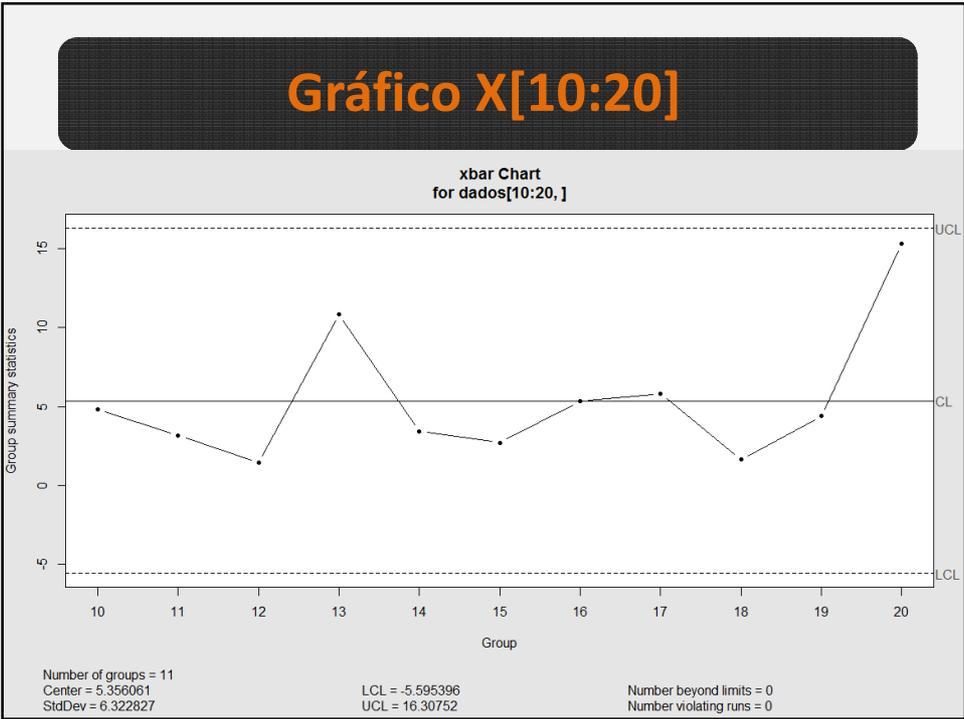
xbar Chart  
for dados



## Gráfico R

R Chart  
for dados





## Exemplo para Gráficos X e R

- Passo-a-passo para obter os valores dos gráficos:
  - Calcular a **linha central** para o gráfico **R**.
  - Verificar o valor das constantes na **Tabela de Constantes** para o tamanho da amostra. (D3, D4 e n=3)
  - Calcular **LIC** e **LSC**
  - Calcular a **linha central** para o gráfico **X**.
  - Verificar o valor das constantes na **Tabela de Constantes** para o tamanho da amostra. (A2 e n=3)

## Gráficos de Controle

- Gráfico X e S:
  - Utilizados quando se deseja encontrar a estimativa diretamente através do uso da amplitude R. Com isso, utiliza-se os **Gráficos de Controle X e S**, onde **S** é o **desvio padrão**.
  - Esses desvios padrões (s) são estimativas do desvio padrão populacional  $\sigma_X$ , isto é, da variável de interesse X.
  - Quando o tamanho da amostra for maior que 10 ou for variável.

## Gráfico X e S

- Para obter os limites de controle do Gráfico X:

$$LSCX = \bar{\bar{X}} + A_3 * \bar{s}$$

$$LMCX = \bar{\bar{X}}$$

$$LICX = \bar{\bar{X}} - A_3 * \bar{s}$$

## Gráfico X e S

- Para obter os limites de controle do Gráfico S:

$$LSCs = B_4 * \bar{s}$$

$$LMCs = \bar{s}$$

$$LICs = B_3 * \bar{s}$$

## Gráfico X e S

$$\bar{\bar{X}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \bar{X}_i$$

Onde  $\bar{X}_i$  é a média da i-ésima amostra para  $i = 1, 2, 3, 4, \dots, m$ .

## Gráfico X e S

$$\bar{s} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n S_i$$

Onde  $S_i$  é o desvio padrão para  $i = 1, 2, 3, \dots, m$ .

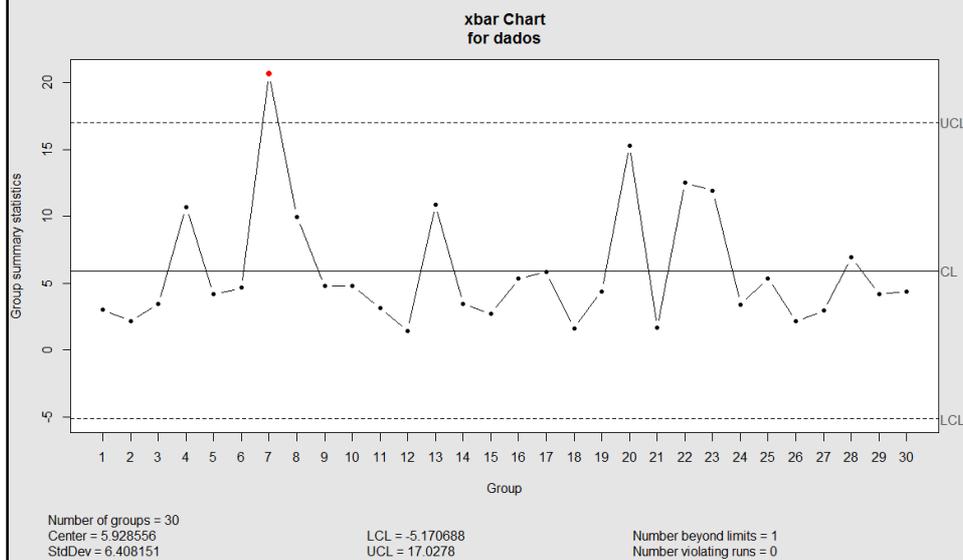
$$S_i = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2}$$

E **A3**, **B3** e **B4** obtidos pela Tabela de Constantes.

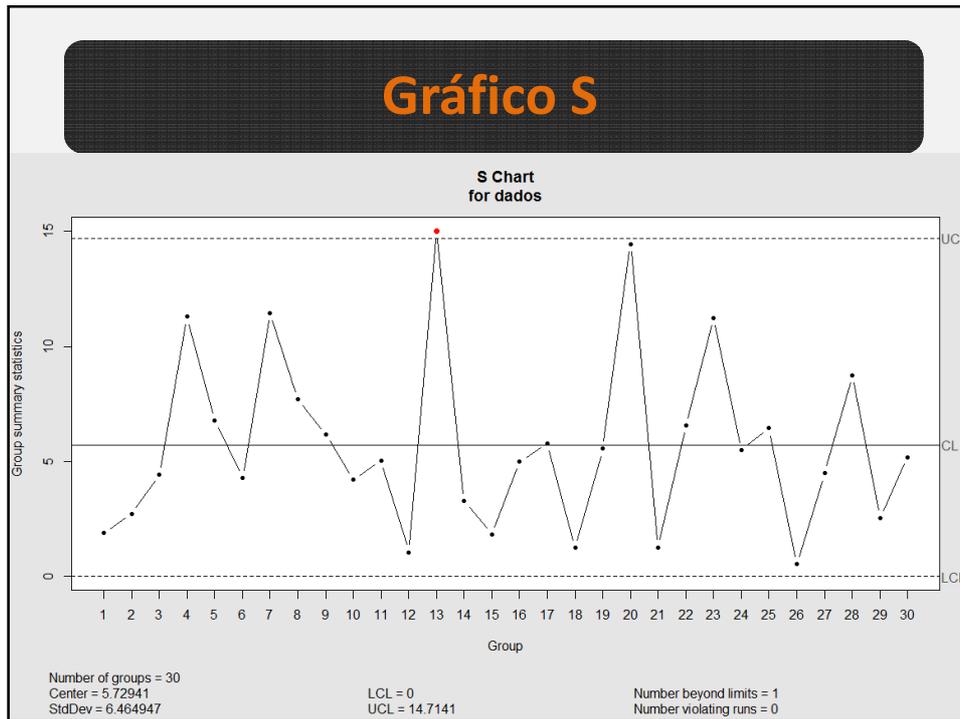
## Exemplo Gráfico X e S

Nº Dias	Máquina 1	Máquina 2	Máquina 3
1	0,250	1,000	5,300
2	1,250	2,750	5,000
3	0,500	1,250	8,500
4	1,500	7,250	23,300
5	0,250	0,250	12,000
6	9,070	0,500	4,400
7	24,500	29,700	7,800
8	18,500	3,500	7,900
9	0,250	2,250	11,800
10	0,000	6,500	7,900
11	0,000	9,000	0,500
12	0,250	1,750	2,300
13	28,000	0,000	4,600
14	3,250	0,250	6,800
15	0,750	3,000	4,400
16	5,000	0,500	10,500
17	1,000	12,250	4,250
18	1,400	3,000	0,500
19	0,500	10,750	1,900
20	31,900	8,750	5,300
21	2,300	2,500	0,200
22	7,250	10,500	19,900
23	12,750	0,250	22,700
24	9,750	0,250	0,200
25	12,500	0,000	3,500
26	1,500	2,500	2,400
27	0,000	0,700	8,100
28	4,000	16,750	0,000
29	7,000	2,000	3,600
30	10,200	2,750	0,200

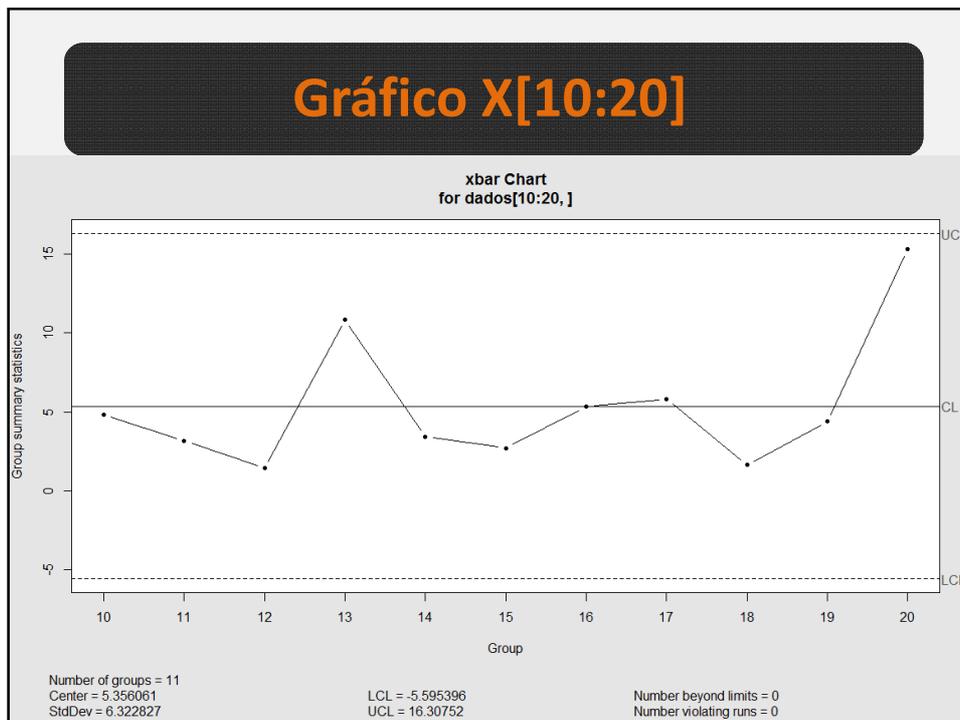
## Gráfico X



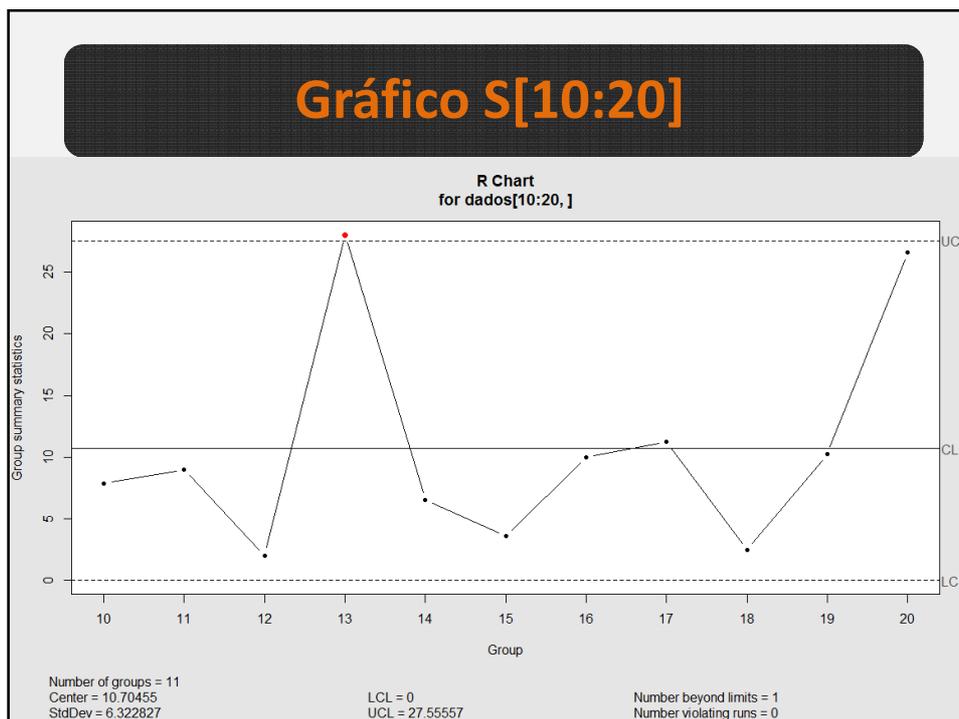
## Gráfico S



## Gráfico X[10:20]



## Gráfico S[10:20]



## Exemplo 2

- Passo-a-passo para obter os valores dos gráficos:
  - Calcular a **média geral** e o **desvio padrão**;
  - Calcular os parâmetros para o gráfico X (**LSC, LC, LIC**);
  - Calcular os parâmetros para o gráfico S (**LSC, LC, LIC**);

## Gráficos de Controle

- Gráfico CUSUM:
  - Gráfico de controle que acumula informações das amostras coletadas sucessivamente capazes de detectar desvios na amostra;
  - Capaz de detectar pequenas mudanças na distribuição da característica da qualidade;
  - Manter um controle apertado sobre o processo;
  - Dar uma estimativa do novo nível do processo ou da nova média.

## Gráfico CUSUM

$$C_i = \sum_{j=1}^i (X_j - \mu_0) = (X_i - \mu_0) + C_{i-1}, \quad i \geq 1$$

- A soma acumulada  $C_i$ , para o  $i$ -ésimo período é a soma de todos os desvios do valor nominal desde o período 1 até o período  $i$  e  $X_j$  é a  $j$ -ésima observação.

## CUSUM Tabular

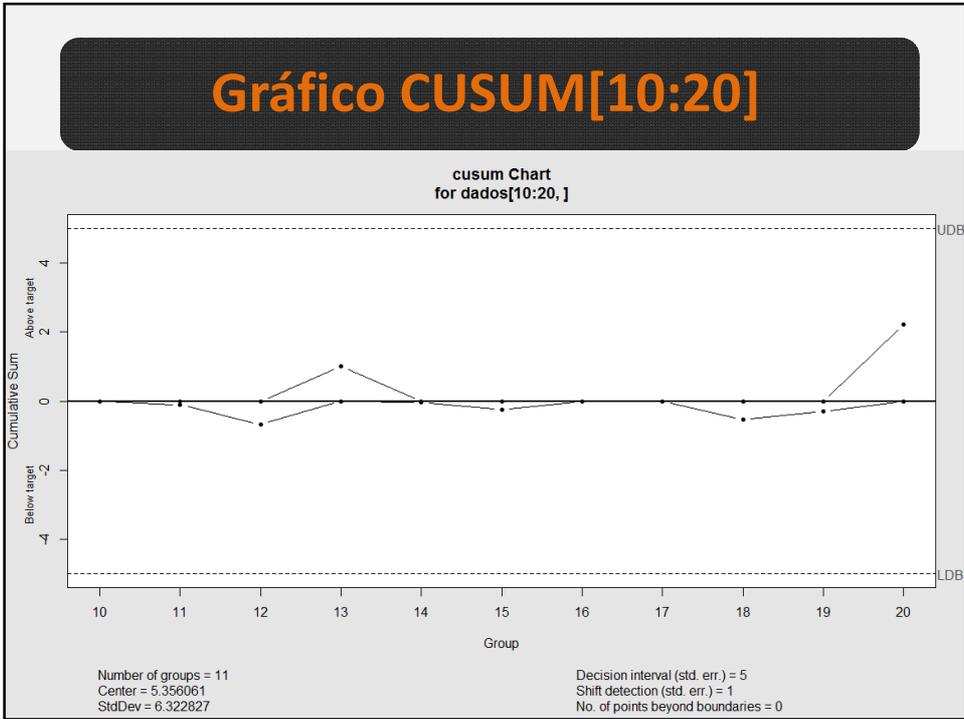
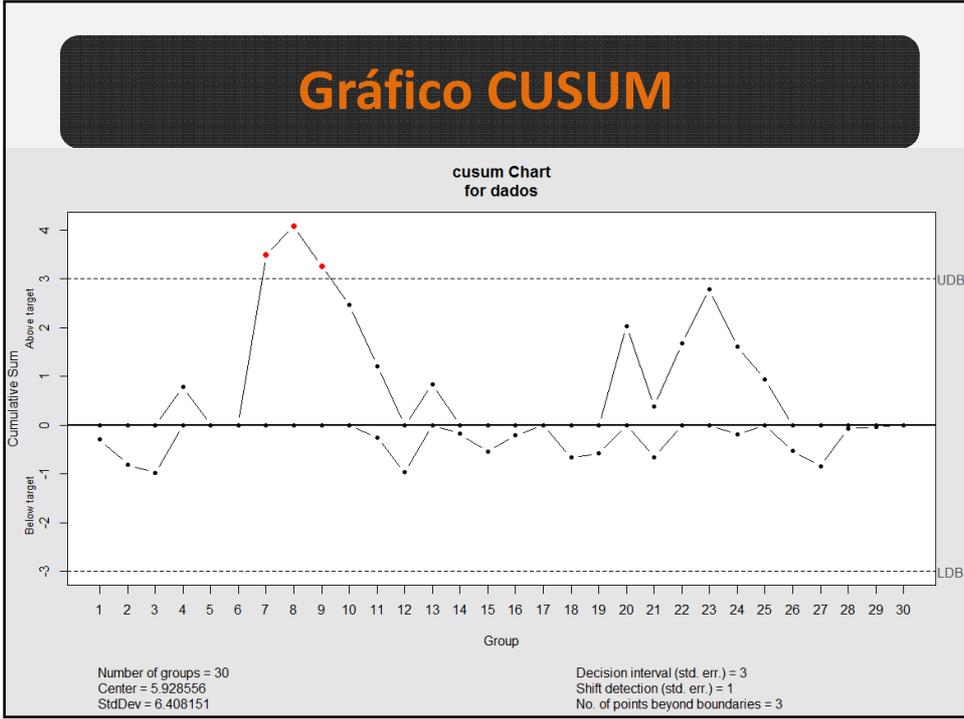
- CUSUM padronizada é a soma acumulada de desvios padronizados.
- CUSUM Tabular distingue entre a soma acumulada positiva e a negativa e, por conseguinte a direção do deslocamento do processo. Uma série de somas acumuladas de desvios negativos, por exemplo, significa que as leituras observadas  $X_i$  são inferiores aos valores nominais  $\mu_0$  mostrando um deslocamento do processo para baixo.

## CUSUM Tabular

Nº Dias	X(Média)	cusum(-)	cusum(+)
1	2,183	-0,512	0,000
2	3,000	-0,804	0,000
3	3,417	-0,983	0,000
4	10,683	0,000	0,785
5	4,167	0,000	0,000
6	4,657	0,000	0,000
7	20,667	0,000	3,488
8	9,967	0,000	4,088
9	4,767	0,000	3,265
10	4,800	0,000	2,460
11	3,167	-0,247	1,214
12	1,433	-0,962	0,000
13	10,867	0,000	0,835
14	3,433	-0,174	0,000
15	2,717	-0,543	0,000
16	5,333	-0,203	0,000
17	5,833	0,000	0,000
18	1,633	-0,661	0,000
19	4,383	-0,579	0,000
20	15,317	0,000	2,038
21	1,667	-0,652	0,386
22	12,550	0,000	1,675
23	11,900	0,000	2,789
24	3,400	-0,183	1,606
25	5,333	0,000	0,945
26	2,133	-0,526	0,000
27	2,933	-0,835	0,000
28	6,917	-0,068	0,000
29	4,200	-0,036	0,000
30	4,383	0,000	0,000
Soma	177,840		
Média	5,928		
Desvio	6,403		

$$CUSUM_i^+ = \max\left(0; CUSUM_{i-1}^+ + \frac{X_i - \mu_0}{S}\right)$$

$$CUSUM_i^- = \min\left(0; CUSUM_{i-1}^- + \frac{X_i - \mu_0}{S}\right)$$



## Gráficos de Controle

- Gráfico EWMA (*Exponentially Weighted Moving Average*):
  - Usado em métodos de estimação e previsão de séries temporais;
  - Usado quando se tem interesse em detectar pequenas deslocamentos na média do processo;
  - Alternativa aos Gráficos de Shewhart.

## Gráfico EWMA

$$Z_t = \alpha X_t + (1 - \alpha)Z_{t-1}$$

Onde:

$Z_t$  é a previsão para a característica no período  $t$ ;

$X_t$  é a característica da qualidade real para o período  $t$ ;

$\alpha$  é a constante de suavização;

$Z_{t-1}$  é a previsão para a característica da qualidade do período  $t-1$ .

Com  $0 < \alpha \leq 1$

## Gráfico EWMA

Desenvolvendo recursivamente a equação anterior para constatar que ela constitui uma média ponderada:

$$Z_t = \alpha X_t + (1-\alpha) [\alpha X_{t-1} + (1-\alpha) Z_{t-2}]$$

## Gráfico EWMA

Substituindo o valor de  $Z_{t-2}$ :

$$Z_t = \alpha X_t + (1-\alpha) \alpha X_{t-1} + (1-\alpha)^2 [\alpha X_{t-2} + (1-\alpha) Z_{t-3}]$$

## Gráfico EWMA

A característica da qualidade real  $X^t$  aparece em todas as expressões da característica da qualidade prevista para um período qualquer  $t$ ; indicando também, que quanto mais antiga a característica da qualidade real exponencialmente, menor será o peso com que aparece na expressão de  $Z^t$ . Caso seja desenvolvido toda a expressão, apenas o valor da característica prevista  $Z^0$ , que foi adotado, irá aparecer ao lado de todas as características da qualidade real, ou seja:

## Gráfico EWMA

$$Z_t = \alpha X_t + (1-\alpha)\alpha X_{t-1} + (1-\alpha)^2 \alpha X_{t-2} + (1-\alpha)^3 \alpha X_{t-3} + \dots + (1-\alpha)^{t-1} \alpha X_0 + (1-\alpha)^t Z_0$$

Ou, generalizando:

$$Z_t = (1-\alpha)^t Z_0 + \alpha \sum_{j=0}^{t-1} (1-\alpha) X_{t-j}$$

## Gráfico EWMA

Onde:

$Z_0$  representa o valor de inicialização, geralmente representado pelo nível médio do processo;

Se as observações  $X^t$  são variáveis aleatórias independentes, com variância  $\sigma^2$ , então a variância de  $Z_t$  será expressa:

$$\sigma_{Z_t}^2 = \sigma^2 \left( \frac{\alpha}{2 - \alpha} \right) [1 - (1 - \alpha)^{2t}]$$

## Gráfico EWMA

- Para obter os limites de controle do Gráfico EWMA

$$LSC = \mu_0 + L\sigma \sqrt{\frac{\alpha}{2 - \alpha} [1 - (1 - \alpha)^{2t}]}$$

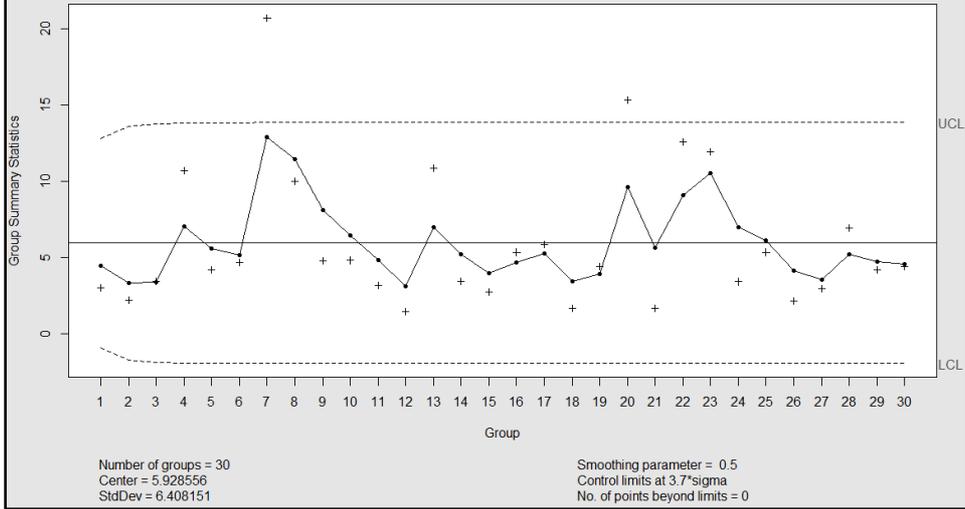
$$LC = \mu_0$$

$$LIC = \mu_0 - L\sigma \sqrt{\frac{\alpha}{2 - \alpha} [1 - (1 - \alpha)^{2t}]}$$

$Z_0 = \mu_0$  (valor-alvo ou valor médio em controle da variável X).

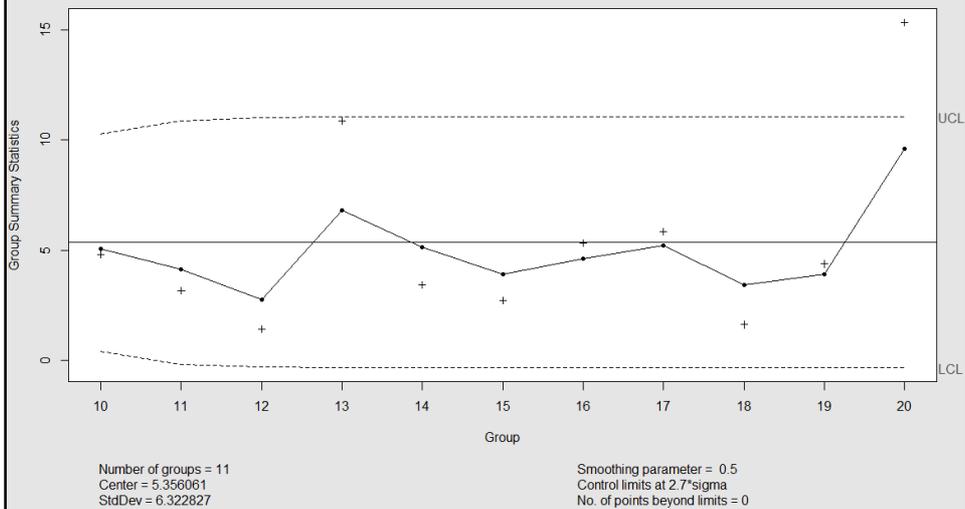
# Gráfico EWMA

EWMA Chart for dados



# Gráfico EWMA[10:20]

EWMA Chart for dados[10:20, ]



## Referências

- MONTGOMERY, D. C. Introduction to Statistical Quality Control. 4th Edition, New York : John Wiley, 2000.
- ALVES, Custodio da Cunha. Gráficos de Controle CUSUM: um enfoque dinâmico para a análise estatística de processos: Dissertação de Mestrado, Florianópolis, 2003.
- VIEIRA, Wesley Vieira da et. al. . Aplicação do Gráfico de Controle Ewma no Processo Produtivo de uma Indústria de Alumínio: Um Estudo de Caso. XI SIMPEP. Bauru - São Paulo. Brasil, 2004.
- REIS, Gustavo Mello & JÚNIOR, José Ivo Ribeiro. Gráficos de Controle. Universidade Federal de Viçosa, 2007.