

Universidade Federal de Pernambuco  
Centro de Informática  
Programa de Pós-graduação

# **Gráfico de Controle Estatístico**

Tópicos Avançados em Análise de  
Desempenho de Sistemas

# Roteiro

- Aumento da Qualidade e Estatísticas
- Controle Estatístico de Qualidade
- Controle Estatístico de Processos (SPC)
- Introdução aos Gráficos de Controle
- Gráficos de Controle X, R e S
- Gráfico de Controle de Soma Cumulativa
- Gráfico de Controle de Média Móvel Exponencialmente Equilibrada (EWMA)

# Aumento da Qualidade e Estatísticas

- Teve sua origem nos idos de 1920, quando o Dr. Walter A. Shewhart, que trabalhava na Bell Telephone Laboratories, foi pioneiro no uso de métodos estatísticos para aumento da qualidade de produtos e serviços.

# Controle Estatístico de Qualidade

- Qualidade significa adequação ao uso de produtos e serviços e que satisfaçam as exigências de uso.
- As exigências de uso definem a adequação ao uso.
- Adequação ao uso é determinada por meio da interação da “Qualidade de Projeto e “Qualidade da Conformidade.
- Qualidade de Projeto são os diferentes níveis de desempenho, de confiabilidade e de serviço, que são o resultado de decisões deliberadas.
- Qualidade de Conformidade é a redução sistemática de variabilidade e a redução de defeitos.
- Melhoria de qualidade significa a eliminação sistemática de desperdício.

# Controle Estatístico de Processos (CEP)

- Conjunto de ferramentas para resolver problemas, as quais podem ser aplicadas a qualquer processo.
- As ferramentas mais importantes são:
  1. Histograma;
  2. Gráfico de Pareto;
  3. Diagrama de Causa e efeito;
  4. Gráfico de Controle;
  5. Diagrama de dispersão;
  6. Folha de verificação.
- O Gráfico de Controle é a mais poderosa das ferramentas de CEP.

# Introdução aos Gráficos de Controle

## - Princípios Básicos

- Em qualquer processo de produção existirá certa quantidade de “Variabilidade” que é inerente ou natural.
- Essa “Variabilidade Natural” é o que denominamos de ruído de fundo que é o resultado cumulativo de muitas causas pequenas inevitáveis.
- Variabilidade Natural é chamada de “Sistema estável de causas casuais.”
- Quando um processo está operando somente “Causas Casuais” é dito que está operando sob controle estatístico.
- As fontes de variabilidades que não fazem parte das causas casuais são denominadas “Causas Atribuídas”.

# Introdução aos Gráficos de Controle

## - Princípios Básicos

- “Causas Atribuídas”, ocasionalmente ocorrem de forma aleatória, causando mudanças para um estado fora de controle em que uma proporção da saída do processo não atende os requerimentos.
- Um objetivo importante no CEQ é detectar ocorrências de “Causas Atribuídas” de modo que uma ação corretiva seja realizada para eliminar defeitos nos processos.
- O gráfico de controle é uma técnica de monitoração em tempo real do processo.

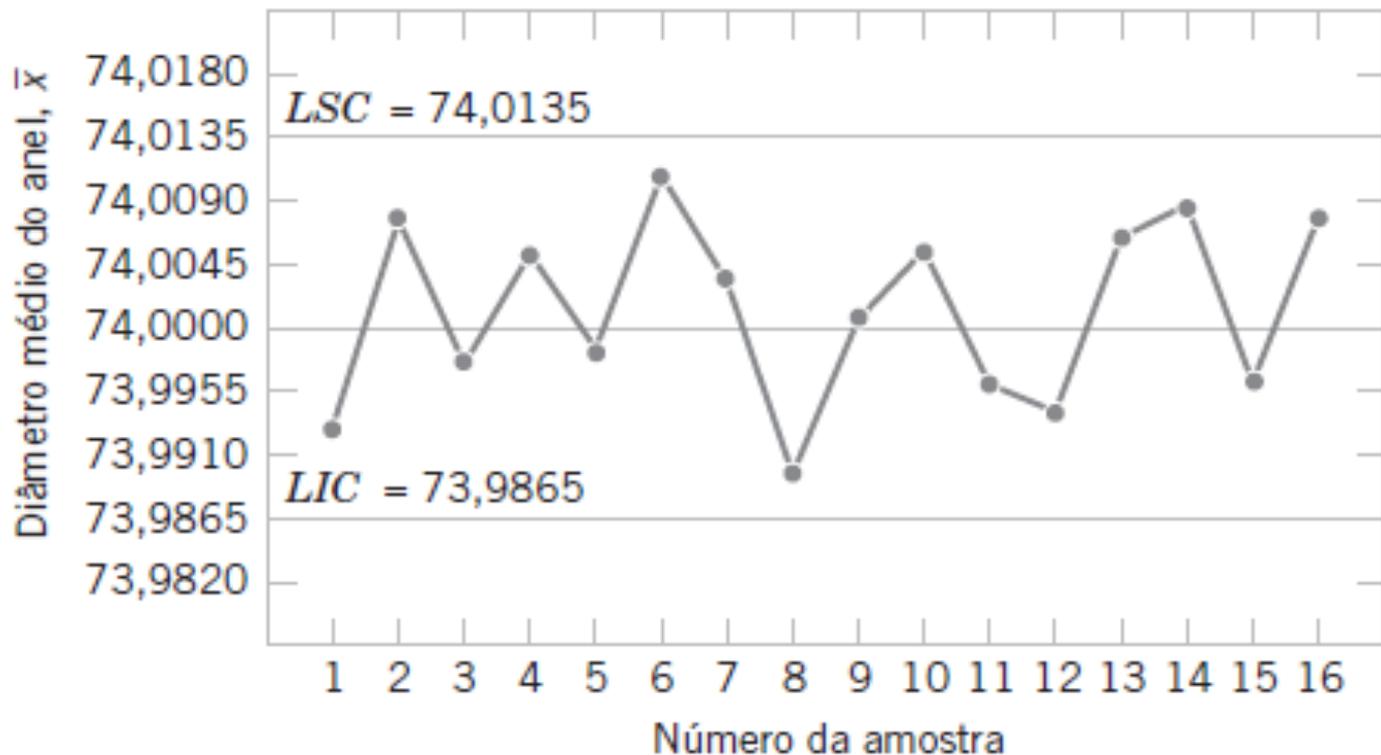
# Introdução aos Gráficos de Controle

## - Princípios Básicos

- Gráficos de Controle podem ser usados para estimar parâmetros de um processo de produção.
- O objetivo do CEP é eliminar a variabilidade do processo.
- O uso mais importante de um Gráfico de Controle é melhorar o processo.

# Introdução aos Gráficos de Controle - Desenho de um Gráfico de Controle

- Gráfico de Controle de Shewhart



# Modelo Geral Para um Gráfico de Controle

## Fórmula para Cálculo dos Limites

Modelo de Gráfico de Controle

$$LSC = \mu_W + k\sigma_W$$

$$LC = \mu_W$$

$$LIC = \mu_W - k\sigma_W \quad (15-1)$$

# Modelo Geral Para um Gráfico de Controle

Seja  $W$  uma estatística da amostra que mede alguma característica da qualidade de interesse. Suponha que a média de  $W$  seja  $\mu_W$  e o desvio-padrão de  $W$  seja  $\sigma_W$ .<sup>\*</sup> Então a linha central, o limite superior de controle e o limite inferior de controle se tornam sendo  $k$  a “distância” dos limites de controle a partir da linha central, expressa em unidades de desvio-padrão. Uma escolha comum é  $k = 3$ .

# Introdução aos Gráficos de Controle - Desenho de um Gráfico de Controle

- O gráfico contém uma linha central (LC) que representa o valor médio da característica da qualidade correspondente ao estudo sob controle.
- Duas outras linhas horizontais, chamadas de “Limite Superior de Controle (LSC) e de “Limite Inferior de Controle (LIC), são mostradas no gráfico.

# Introdução aos Gráficos de Controle - Desenho de um Gráfico de Controle

- Os limites são escolhidos de modo que, se o processo estiver sob controle, aproximadamente todos os pontos da amostra cairão entre eles.
- Há uma forte conexão entre gráficos de controle e testes de hipótese.
- Essencialmente, o gráfico de controle é um teste de hipótese.

# Introdução aos Gráficos de Controle

## - Subgrupos Racionais

- São subgrupos que devem ser selecionados de modo que a variabilidade das observações dentro de um subgrupo possa incluir toda a variabilidade casual ou natural e excluir a variabilidade atribuída.
- Causas atribuídas tendem a gerar pontos que estejam fora dos limites de controle.
- Variabilidade Casual tende a gerar pontos que estejam dentro dos limites de controle.
- Para formar subgrupos a ordem horária é uma boa base porque permite detectar causas atribuídas que ocorrem ao longo do tempo.

# Introdução aos Gráficos de Controle

## - Subgrupos Racionais

- Duas abordagens são usadas com o objetivo de construir subgrupos racionais.
- Na primeira, cada subgrupo consiste em unidades que foram produzidas ao mesmo tempo. (Detecta mudanças no processo)
- Na segunda, cada amostra consiste em unidades de produto que são representadas de todas unidades que forem produzidas desde a última amostra ter sido coletada. (Cada subgrupo é uma amostra aleatória)

# **Introdução aos Gráficos de Controle - Análise de Padrões em Gráficos de Controle**

- Análise de Padrões em Gráficos de Controle consiste em analisar se os dados de uma amostra estão fora de controle aleatório de comportamento.

# Gráfico X de Controle

- Utilizado quando um atributo de qualidade pode ser expressado como uma medida.
  - Tamanho de determinada peça produzida.
  - Coloração da pintura do produto.
  - Tempo de resposta do sistema.
  - Tempo de latência da rede.
  - etc.

# Gráfico X de Controle

- Representa média e variabilidade da métrica.
- Chamado de  $\bar{X}$  por ter como valor referencial a média da população em questão.
- Variabilidade pode também ser controlada pela Amplitude (*Range*, gráfico R) ou pelo Desvio Padrão (*Standard Deviation*, gráfico S), dependendo de como os dados da população são estimados.

# Gráfico X de Controle

- Suponha média e desvio padrão conhecidos:  $\mu$  e  $\sigma$
- Valores seguem uma distribuição normal.
- Temos  $\mu$  como linha central e determinamos limites superior e inferior em função de  $\sigma$ .

# Gráfico X de Controle

- Calculando:

$$LSC = \mu + 3\sigma/\sqrt{n}$$

$$LC = \mu$$

$$LIC = \mu - 3\sigma/\sqrt{n}$$

# Gráfico X de Controle

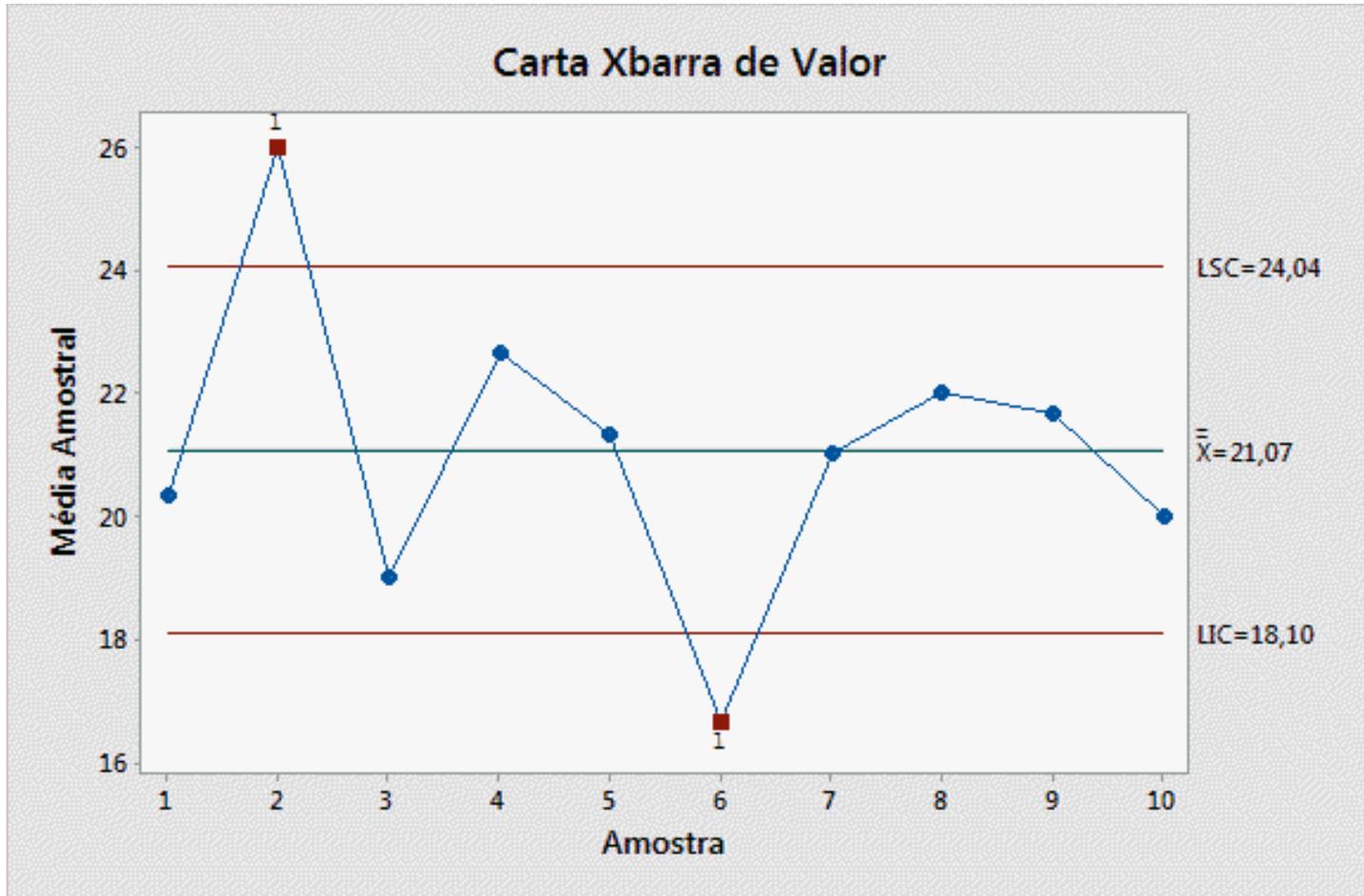
- Para  $\mu$  e  $\sigma$  desconhecidos os valores são normalmente estimados a partir de amostras preliminares.
- Recomendável 20 a 25 amostras preliminares, no mínimo.
- Temos  $m$  amostras preliminares de tamanho  $n$ . Geralmente  $n$  varia entre 4 e 6.

# Gráfico X de Controle

- Estimando a média populacional:

$$\hat{\mu} = \bar{\bar{X}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \bar{X}_i$$

# Gráfico X de Controle



# Gráfico R de Controle

- Gráfico R (do inglês *Range*, amplitude).
- O valor  $R$  é referente a amplitude da amostra, ou seja, a diferença entre o maior e o menor valor.
- A amplitude relativa  $W$  é dada por:

$$W = R/\sigma$$

# Gráfico R de Controle

- Média e Desvio Padrão de  $W$  são dados por  $d_2$  e  $d_3$ .
- $d_2$  e  $d_3$  dependem do tamanho  $n$  da amostra.
- $d_2$  e  $d_3$  são previamente computados e disponíveis em tabelas.

$$\mu_R = d_2 \sigma$$

$$\sigma_R = d_3 \sigma$$

# Gráfico R de Controle

- Tendo a média de  $R$ :

$$\bar{R} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \bar{R}_i$$

- Toma-se a média de  $R$  como uma estimativa para o valor de  $\mu_R$ . Assim o valor estimado para  $\sigma_R$  é dado por:

$$\hat{\sigma} = \bar{R} / d_2$$

# Limites para um Gráfico X a partir de um Gráfico R

- Quando o desvio padrão da variável é calculado em função da média da amplitude das amostras temos os seguintes limitadores para um Gráfico X:

$$LSC = \bar{\bar{x}} + \frac{3}{d_2\sqrt{n}}\bar{r}$$

$$LIC = \bar{\bar{x}} - \frac{3}{d_2\sqrt{n}}\bar{r}$$

$$A_2 = \frac{3}{d_2\sqrt{n}}$$

- $A_2$  é uma constante em função de  $n$  definida em tabela.

# Gráfico R de Controle

- Estimando o desvio padrão de  $R$ :

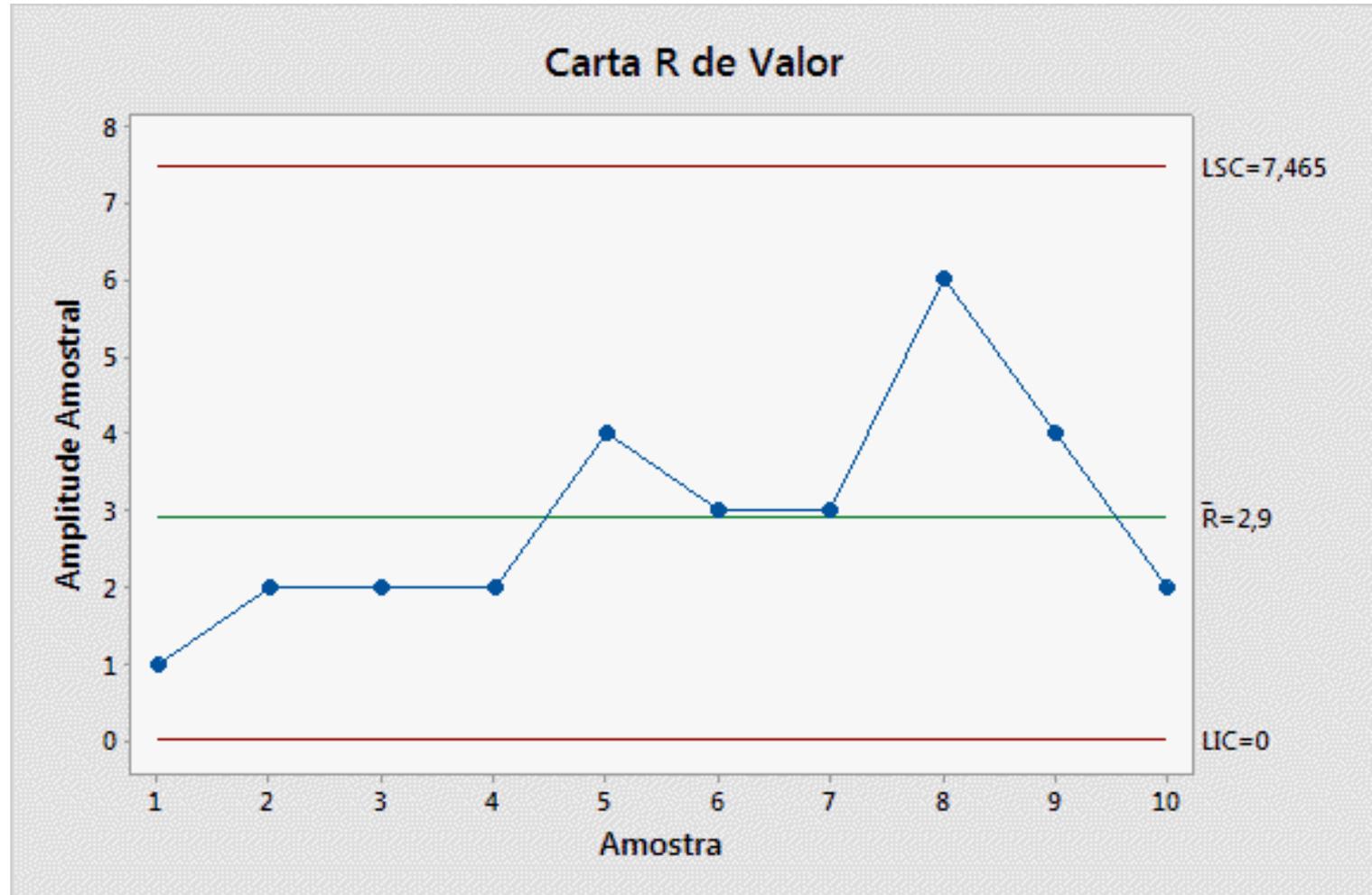
$$\hat{\sigma}_R = d_3 \hat{\sigma} = d_3 \frac{\bar{R}}{d_2}$$

$$LSC = \bar{r} + \frac{3}{d_2 \sqrt{n}} \bar{r} = \left(1 + \frac{3d_3}{d_2}\right) \bar{r}$$

$$LIC = \bar{r} - \frac{3}{d_2 \sqrt{n}} \bar{r} = \left(1 - \frac{3d_3}{d_2}\right) \bar{r}$$

$$D_3 = 1 - \frac{3d_3}{d_2} \quad D_4 = 1 + \frac{3d_3}{d_2}$$

# Gráfico R de Controle



# Gráfico S de Controle

- Gráfico S (do inglês *standard deviation*, desvio padrão).
- Para subgrupos pequenos (menores que 10) a diferença entre gráficos X gerados a partir de *ranges* ou desvios padrões é pequena.
- S é uma estimativa de  $\sigma$ . 
$$E(\bar{S}) = c_4 \sigma$$
- $c_4$  é uma constante próxima, mas não igual a 1.

# Gráfico S de Controle

- S é obtido a partir de:

$$\bar{S} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \bar{S}_i$$

- A estimativa do desvio padrão é dada por:

$$\hat{\sigma} = \bar{S} / c_4$$

- $c_4$  é tabulado para vários tamanhos de amostras.

# Limites para um Gráfico X a partir de um Gráfico S

- Quando o desvio padrão da variável é calculado em função da média da amplitude das amostras temos os seguintes limitadores para um Gráfico X:

$$LSC = \bar{\bar{x}} + 3 \frac{\bar{s}}{c_4 \sqrt{n}}$$

$$LC = \bar{\bar{x}}$$

$$LIC = \bar{\bar{x}} - 3 \frac{\bar{s}}{c_4 \sqrt{n}}$$

# Gráfico S de Controle

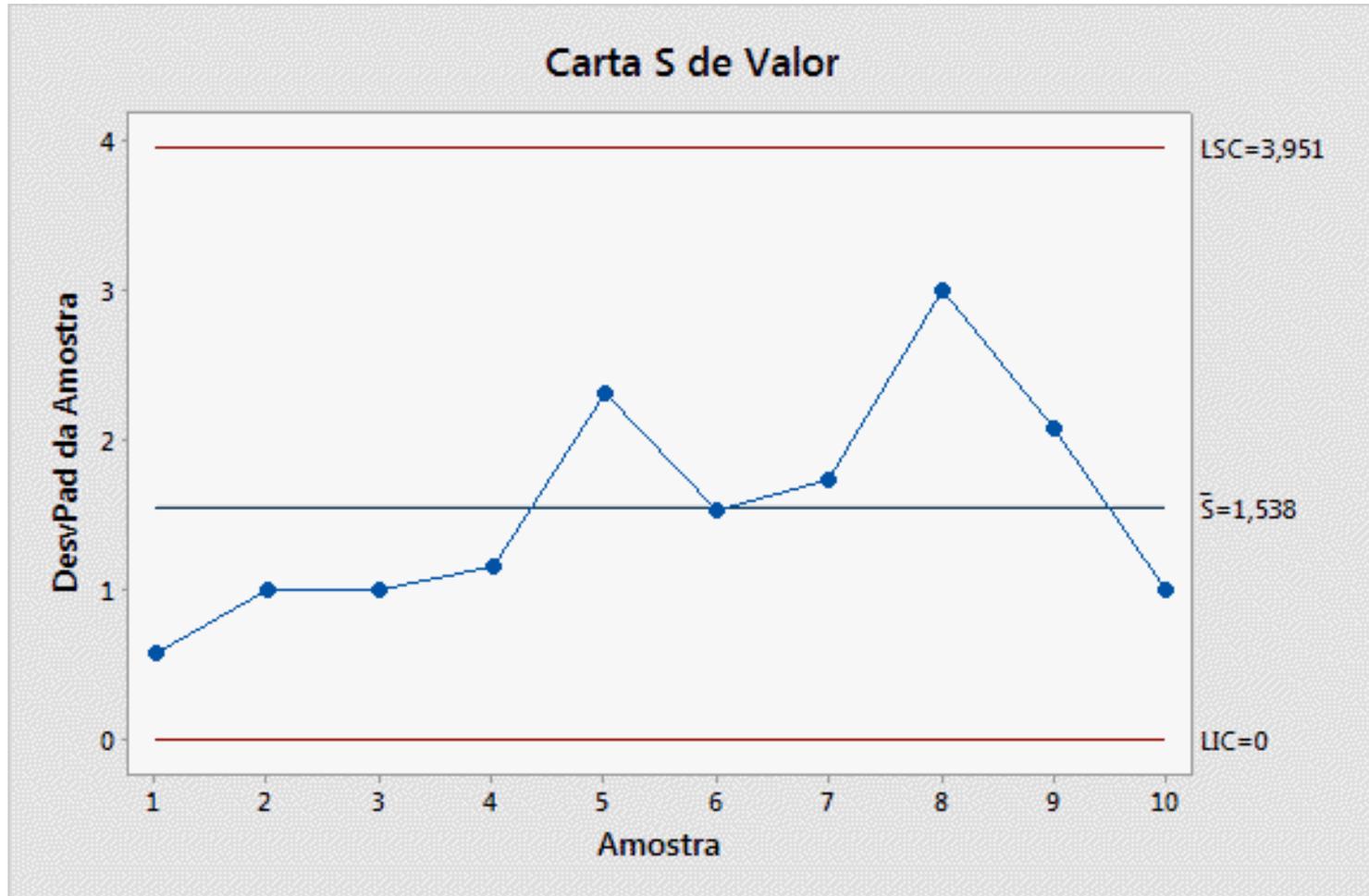
- Os limites do gráfico S são dados por:

$$LSC = \bar{s} + 3 \frac{\bar{s}}{c_4} \sqrt{1 - c_4^2}$$

$$LC = \bar{s}$$

$$LIC = \bar{s} - 3 \frac{\bar{s}}{c_4} \sqrt{1 - c_4^2}$$

# Gráfico S de Controle



# Gráficos de Controle X e R ou S - Exercício

- Excel e Minitab

# Gráfico de Controle de Soma Cumulativa

- Gráficos de Shewhart tem como desvantagem pouca sensibilidade a pequenas alterações no processo.
- Alterações na ordem de  $1,5\sigma$  ou menos.
- Considera apenas informação do último ponto desenhado.
- Regras de interpretação aumentam complexidade do uso dos gráficos de Shewhart.

# Gráfico de Controle de Soma Cumulativa

- Sofre influência do tempo.
- Considera informação da sequência dos últimos pontos desenhados.
- Desenha a soma cumulativa dos desvios das amostras a partir de um valor objetivo.

$$S_i = \sum_{j=1}^i (\bar{X}_j - \mu_0)$$

# Gráfico de Controle de Soma Cumulativa

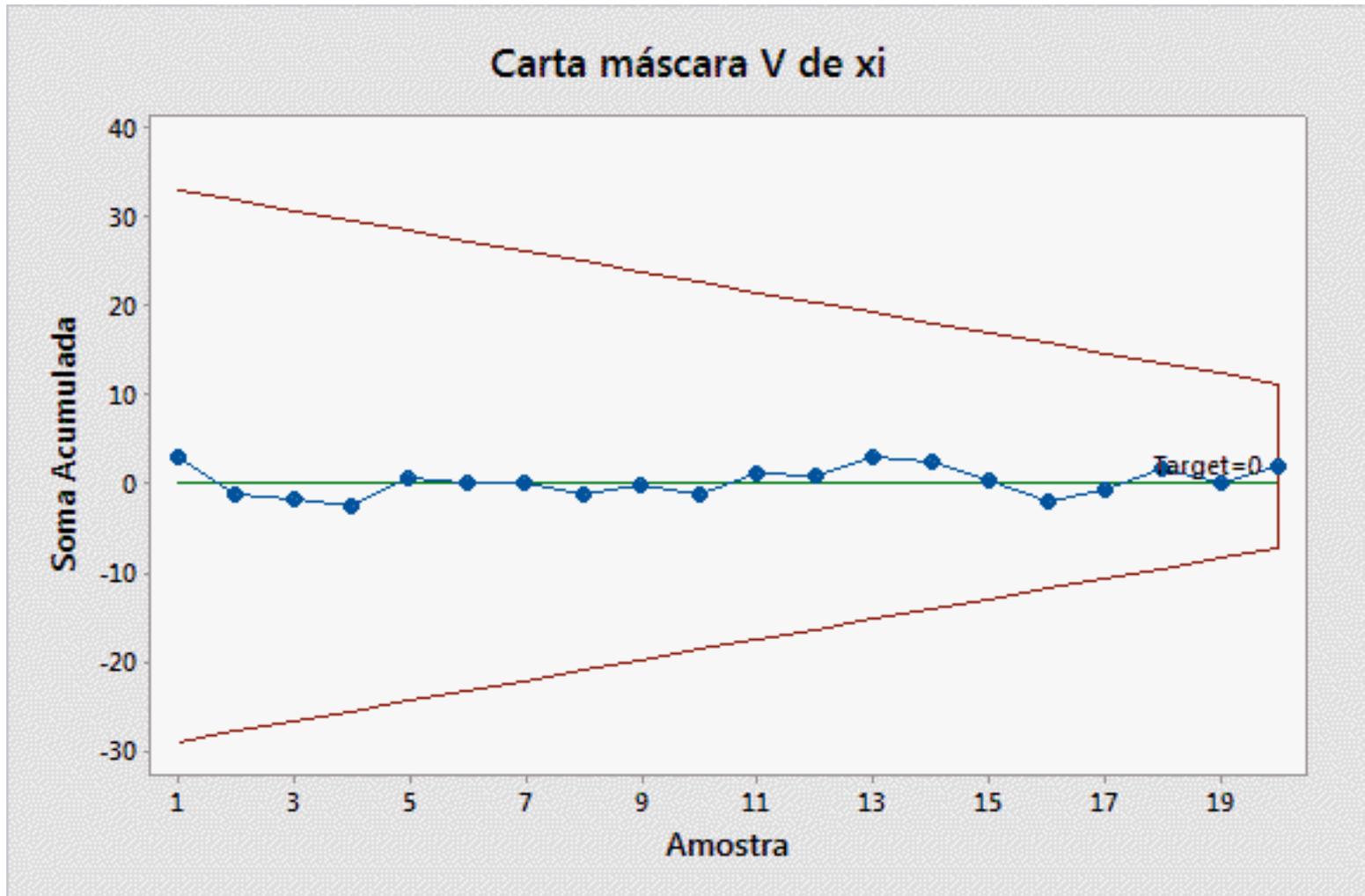
- O valor do próximo ponto e resultado da diferença entre o valor medido e o valor objetivo, somado com o valor do ponto anterior.

$$\begin{aligned} S_i &= \sum_{j=1}^i (X_j - 99) = (X_i - 99) + \sum_{j=1}^{i-1} (X_j - 99) \\ &= (X_i - 99) + S_{i-1} \end{aligned}$$

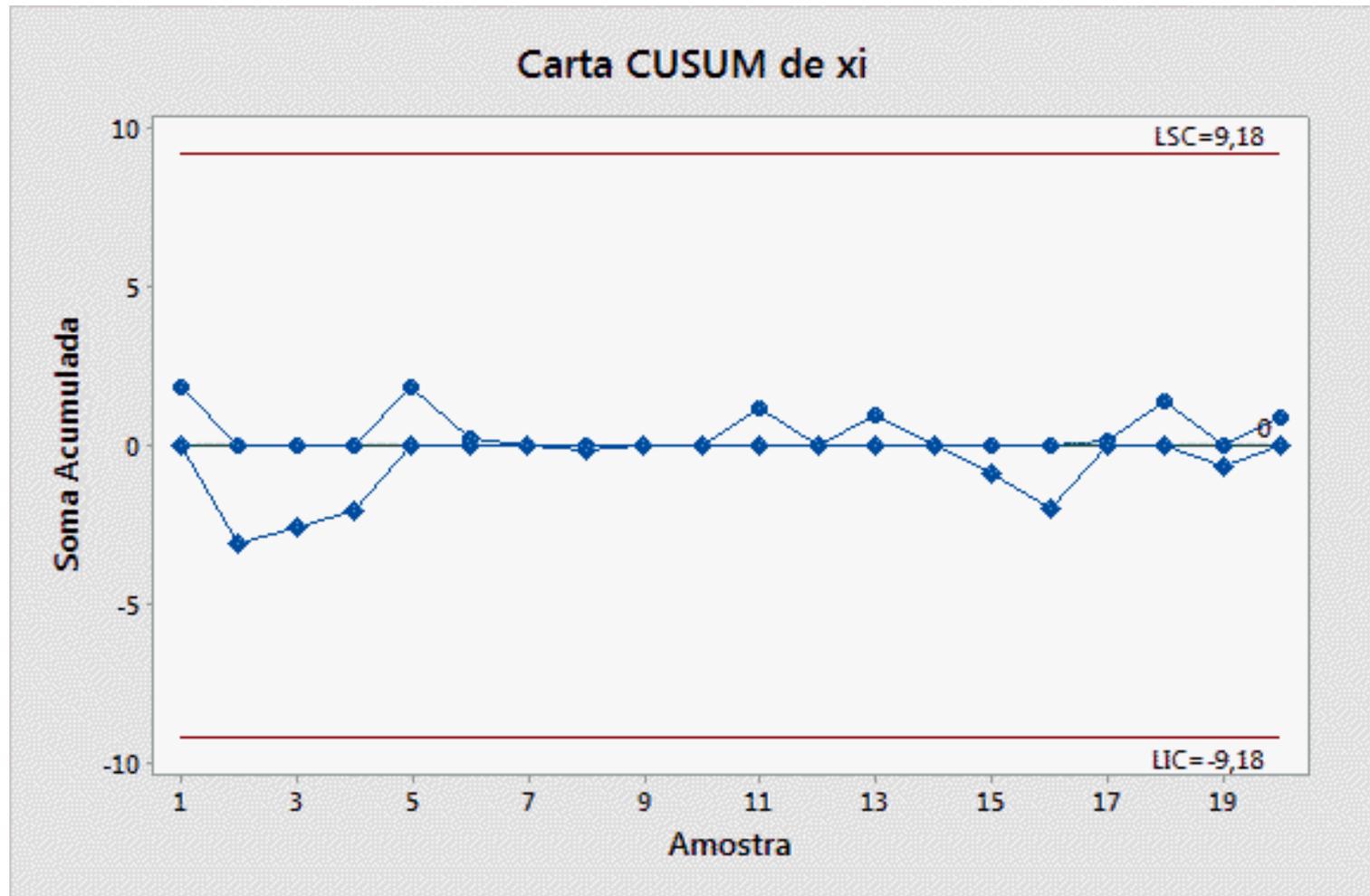
# Gráfico de Controle de Soma Cumulativa

- Pode ter valores limitados de duas formas:
  - Máscara V
  - Valor de Referência

# Gráfico de Controle de Soma Cumulativa



# Gráfico de Controle de Soma Cumulativa



# Gráfico de COntrôle de Soma Cumulativa - Exercício

- Minitab

# Gráfico de Controle de Média Móvel Exponencialmente Equilibrada (EWMA)

- Dados coletados em ordem temporal frequentemente são normalizados entre períodos de tempo.
- Dados economicos geralmente são apresentados a cada trimestre. O peso médio de  $1/n$  para os dados mais recentes.
- Chamada: Média Móvel
- $n$  é o tamanho da janela

# Gráfico de Controle de Média Móvel Exponencialmente Equilibrada (EWMA)

- Para CEP, utiliza-se janela de tamanho fixo e maior peso para as observações mais recentes, sendo este gradualmente diminuído para dados mais antigos.

$$\begin{aligned} z_t &= \lambda \bar{x}_t + \lambda(1-\lambda)\bar{x}_{t-1} + \lambda(1-\lambda)^2 \bar{x}_{t-2} + \cdots + \lambda(1-\lambda)^{t-1} \bar{x}_1 + (1-\lambda)^t \mu_0 \\ &= \sum_{k=0}^{t-1} \lambda(1-\lambda)^k \bar{x}_{t-k} + (1-\lambda)^t \mu_0 \end{aligned}$$

# Gráfico de Controle de Média Móvel Exponencialmente Equilibrada (EWMA)

- $0 < \lambda < 1$
- Maior valor para  $\lambda$ , maior sensibilidade para alterações, menos normalização de ruídos.
- Menor valor para  $\lambda$ , menor sensibilidade para alterações, mais normalização de ruídos.

# Gráfico de Controle de Média Móvel Exponencialmente Equilibrada (EWMA)

- O valor de  $Z$  é dado por:

$$V(Z_t) = \frac{\sigma^2}{n} \frac{\lambda}{2 - \lambda} \left[ 1 - (1 - \lambda)^{2t} \right]$$

# Gráfico de Controle de Média Móvel Exponencialmente Equilibrada (EWMA)

- Os limites do Gráfico EWMA são:

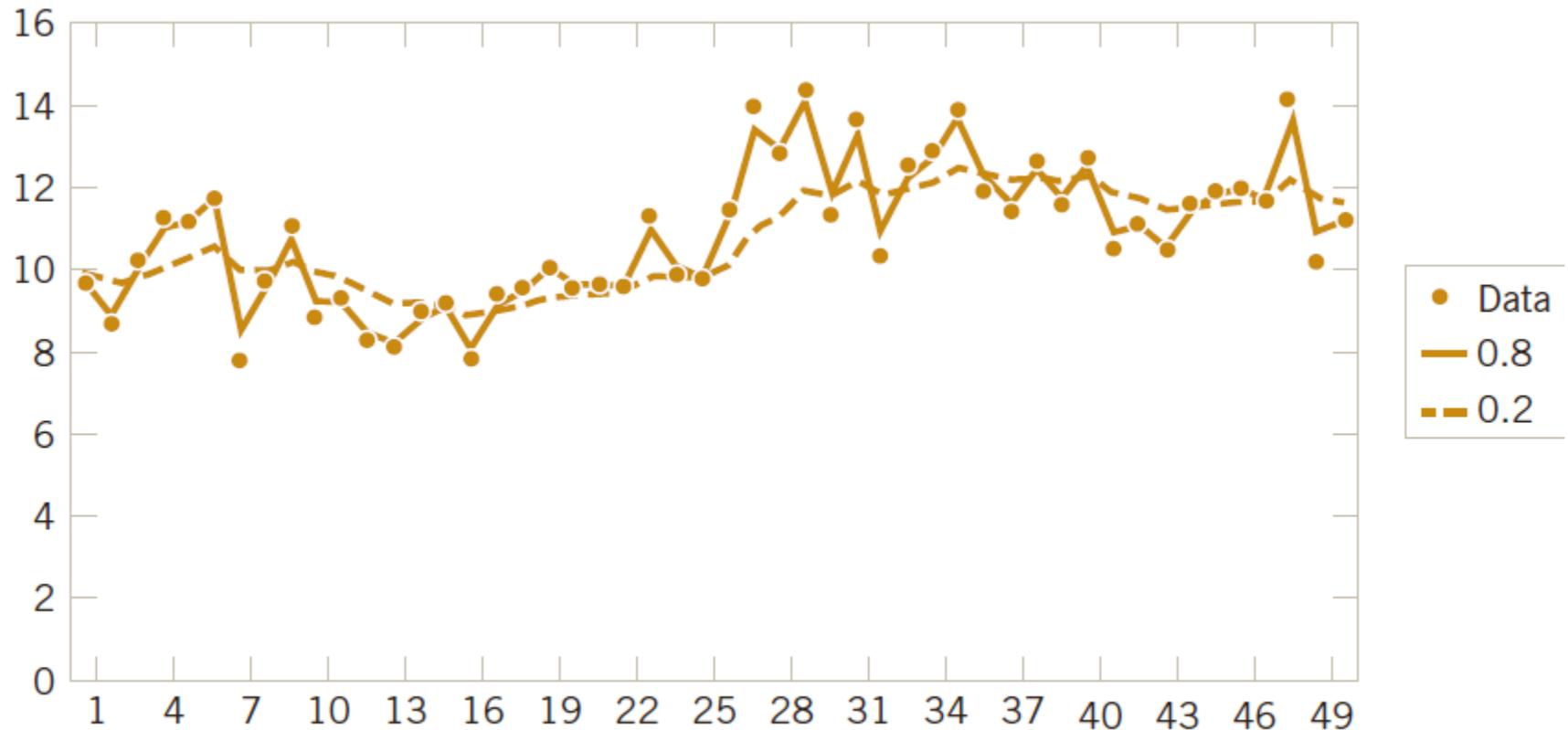
$$LCL = \mu_0 - 3 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda} \left[ 1 - (1 - \lambda)^{2t} \right]}$$

$$CL = \mu_0$$

$$UCL = \mu_0 + 3 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda} \left[ 1 - (1 - \lambda)^{2t} \right]}$$

- A média e o desvio padrão são calculadas da mesma forma que nos gráficos  $\bar{X}$ ,  $R$  e  $S$ .

# Gráfico de Controle de Média Móvel Exponencialmente Equilibrada (EWMA)



**FIGURE 15-22** EWMAs with  $\lambda = 0.8$  and  $\lambda = 0.2$  show a compromise between a smooth curve and a response to a shift.

# Gráfico de Controle de Média Móvel Exponencialmente Equilibrada (EWMA)

