

Fórmula Fechada - Mathematica

Para modelos Markov



Maria Clara Bezerra (mscb@cin.ufpe.br) Rosângela Melo (rmm3@cin.ufpe.br)

Recife, novembro de 2013.

Finalidade do Tutorial

Este tutorial tem por finalidade conceber uma fórmula fechada de modelos de cadeia de Markov, possibilitando calcular a disponibilidade de um componente através da equação alcançada.

A ferramenta Mathematica pode ser adquirida no formato *trail*, através do link: <u>http://www.wolfram.com/mathematica/trial/</u>

Pode também ser comprada: <u>http://www.wolfram.com/mathematica/how-to-buy/?b=1</u>

Ou, caso você seja estudante da UFPE, pode baixar a ferramenta de forma gratuita, secadastrandonolinkaseguir:https://user.wolfram.com/portal/login.html;jsessionid=D152E230EDCC79ECCDC929033C5BB0B2

Tendo a ferramenta instalada na sua máquina, é necessário fazer uma análise do modelo de Markov a ser trabalhado, como será ensinado neste tutorial.

O link a seguir contém o pacote para inserir no Mathematica, e o modelo para gerar a fórmula fechada, baixe e extraia em alguma pasta: <u>http://bit.ly/1hjuFUc</u>

"StateDiagrams.m" é o pacote a ser inserido no Mathematica.

"Formula_Fechada.nb" é o modelo a ser utilizado para gerar a fórmula fechada.

Análise do Modelo de Markov

Vamos considerar o exemplo do modelo de Markov abaixo para entender o processo de aquisição da fórmula fechada:



Figure 1. Modelo de Markov

Este modelo representa os estados de um sistema que provê vídeos como serviço, e que possui duas aplicações primordiais ao serviço: Apache e VLC. Estas aplicações são executadas em uma única VM. Ou seja, este modelo possui quatro estados, são eles:

Au_Vu_VMu: Apache UP, VLC UP, VM UP (Estado UP do Sistema).

Ad_Vu_VMu: Apache Down, VLC UP, VM UP (Estado Down do Sistema).

Ad_Vd_VMu: Apache Down, VLC Down, VM UP (Estado Down do Sistema).

Ad_Vd_VMd: Apache Down, VLC Down, VM Down (Estado Down do Sistema).

Au_Vd_VMu: Apache UP, VLC Down, VM UP (Estado Down do Sistema).

É necessário estabelecer uma ordem para analisar os estados. A ordem escolhida neste exemplo é a dada pela sequência acima. Observe o primeiro estado (Au_Vu_VMu) e veja se ele alcança o estado 2, o estado 3, e assim por diante. Da mesma forma, observe o estado 2 (Ad_Vu_VMu) e observe se ele alcança o estado 1, estado 3, etc. No estado 3 (Ad_Vd_VMu), observe se ele alcança o estado 1, estado 3 e assim sucessivamente. Lembre-se de sempre manter a mesma ordem de conferência.

O Sharp tem a função de retornar os estados alcançáveis de cada estado. Com o modelo pronto e salvo, clique em "Rate Matrix" e será exibida uma matriz com o relacionamento dos estados do modelo, através da opção ilustrada abaixo:

			1 20.000	Accepted a		214					1	9
🖻 🖪 🖻 🖠	≥ _	Node	→ 4	Arc 🗠	Modif.)	Arc Rate Matrix	🖹 Сору	🔁 Paste	🔏 Cut	M Delete	e ^O o Move	🥢 Clear
larkov Chain Model					9	Rate Matrix						
w Theree	onnucação	100	Sec.									
project : Modelo	Oficial_1 a	nd its m	odels.			-	1					
loudflixnew						Matrix	Au_Vu	Ad_Vu	Ad_Vd	Ad_Vd	Au_Vd	
1979-1970-1976-1970-1970-1970-1970-1970-1970-1970-1970	1 Ki	1 0	83		- K.	Au_Vu_VMu		lambda_A		lambda	lambda_V	
						Ad_Vu_VMu	mu_A		lambda_V	lambda		
	3/3					Ad_Vd_VMu		mu_V		lambda	mu_A	
	1.1					Ad_Vd_VMd	mu_in					

Figure 2. Matriz dos Estados

Faça a análise comparando linha por coluna, relembrando que se um estado não alcança o próximo estado, seu valor é considerado 0 (zero). Se for comparar um estado com ele mesmo, não atribua nenhum valor (deixe em branco).

O resultado deste exemplo de markov é o descrito abaixo:

(,λap, λvm, λvlc), (μap, , sd, 0), (sup, 0, , 0), (μvlc, 0, sd,)

Estes valores serão inseridos no Mathematica para que a Fórmula Fechada seja alcançada.

Fórmula Fechada

Depois dos estados alcançáveis anotados, agora é hora de abrir o software Mathematica. Quando a ferramenta iniciar, abra o pacote da fórmula fechada, através dos passos: File>Open> StateDiagrams.m

File	Edit Insert	Format	Cell	Graphics	Evaluation	Palettes	Window	Help
	New				•			
	Open			C	trl+O			
	Close			Ct	rl+F4		Demonstra	ations
	Close All			Shift+Ct	rl+F4			
	Save			C	trl+S			
	Save As			Shift+C	trl+S			
	Save Selection	As						
	Revert							

Figure 3. Abrir Pacote no Mathematica

Abra o pacote selecionado e clique em "run package", como a imagem abaixo demonstra:

File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes	Window Help
Vntitled-1 *	
V 🔯 StateDiagrams.m	
Wolfram Mathematica STUDENT EDITION	Demonstrations MathWorld Wolfram Community Help
Functions V Sections V OUpdate	Debug Run Package
	Evaluate initialization cells

Figure 4. Executar Pacote da Fórmula Fechada

Uma vez executado o pacote, você pode fechar esta janela do "StateDiagram.m", mas caso feche o Mathematica, será necessário executar este pacote novamente.

Repita o procedimento da imagem 3 para abrir o modelo da fórmula fechada. A tela a ser vista será essa:

Formula fechada.nb			
Wolfram Mathematica	STUDENT EDITION	Demonstrations MathWorld	Wolfram Community Help
<pre>Mtemp = {{, λα Transpose[Mt (Mx = SetDiag Q = Transpose</pre>	ap, λvm, λvlc}, {μap, , sd, emp] onal[Transpose[Mtemp]]) // [Mx] // MatrixForm	0}, {sup, 0, , 0}, {μv] MatrixForm	Lc, 0, sd,}};
WorkingQ = {T Labels = {"UP PlotDiagram[Ps = ProbStat FullSimplify	<pre>rue, False, False, False, False; ", "Fap", "Fall", "Fvlo"}; Mx, Working0, Labels] ionary[Mx] // Simplify [UnAvailability[Ps, Workin]</pre>	gQ]]	1

Figure 5. Modelo da Fórmula Fechada

Caso você abra este modelo e ele já retorne algum tipo de resultado, siga o procedimento de apagar as saídas do modelo, como sugere a imagem a seguir:



Você só irá se preocupar em alterar a primeira linha <u>Mtemp</u>, a linha <u>WorkingQ</u> e a linha <u>Labels</u>. A linha Mtemp representa os estados alcançáveis de cada estado, é aí que você irá preencher os valores obtidos na análise inicial do Sharp. Ressaltando que, quando for comparar um estado com ele mesmo, seu valor será um espaço em branco; e quando o estado não for alcançado, o valor será 0 (zero).

A linha WorkingQ é reservada para indicar os estados que são UP (true) e DOWN (false). Considere a mesma ordem dos estados adotada na análise inicial do Sharp.

A linha seguinte, a Labels, é a linha que vai rotular os estados do modelo. Então dê um nome para cada estado, que represente bem cada estado.

Na primeira linha (Mtemp), você irá inserir os valores alcançados na análise do modelo de Markov, que no exemplo utilizado, chegamos nos seguintes valores:

(, λ ap, λ vm, λ vlc), (μ ap, , sd, 0), (sup, 0, , 0), (μ vlc, 0, sd,)

A segunda linha a ser alterada (WorkingQ) é a linha que indica os estados que estão UP (True) e os que estão DOWN (False). No exemplo utilizado, os estados ficaram na seguinte sequência: True, False, False, False.

A última linha a ser editada (Labels) é a linha que irá expressar o nome dado a cada estado do seu modelo. No modelo de Markov utilizado como exemplo, foram escolhidos os seguintes rótulos: **Up** (todos os componentes UP e o sistema funcionando perfeitamente), **Fap** (falha no Apache), **Fall** (falha em todos os componentes do sistema, deixando o serviço fora do ar por completo), **Fvlc** (falha da aplicação do VLC). Lembre-se de utilizar rótulos que deixem o seu modelo intuitivo.

Depois destes passos, é hora de finalmente gerar a fórmula fechada do seu modelo de Cadeia de Markov. Para chegar neste ponto, siga o procedimento da imagem abaixo, seguindo as opções: Evaluation>Evaluate Notebook:

File Edit Insert Format Cell Graphics Ev	aluation Palettes Window Help			
Formula_fechada.nb	Evaluate Cells Evaluate in Place	Shift+Enter Shift+Ctrl+Enter		
Wolfram Mathematica STUDENT EDITIO	Evaluate in Subsession	F7		
$Mtemp = \{\{, \lambda ap, \lambda vm, \lambda v\}$	Evaluate Notebook Evaluate Initialization Cells V Dynamic Updating Enabled Convert Dynamic to Literal			
Transpose[Mtemp]				
(Mx = SetDiagonal[Transp Q = Transpose[Mx] // Matr				
Working - (True False	Debugger			

Figure 6. Gerando a Fórmula Fechada

O resultado alcançado será como o ilustrado abaixo, com uma Cadeia de Markov seguida dos passos até alcançar a Fórmula Fechada para o seu modelo. Neste exemplo nós consideramos valores iguais para falha e reparo do Apache e do VLC, o que reduziu o tamanho da nossa fórmula.



$\int (\lambda \lambda vm + \lambda vm^2 + 3 \lambda vm \mu + 2 \mu^2) \mu in$		$\lambda (\lambda vm + 2 \mu) \mu in$	
$\left(\frac{1}{(\lambda + \lambda vm + \mu)} (2 \lambda + \lambda vm + 2 \mu) (\lambda vm + \mu in)\right)'$	$(\lambda + \lambda \mathbf{vm} + \mu)$	$(2 \lambda + \lambda vm + 2 \mu) (\lambda vm + \mu in)$	'
$2 \lambda^2 \mu in$	λvm	$\lambda (\lambda vm + 2 \mu) \mu in$. ı
$\frac{(\lambda + \lambda vm + \mu) (2 \lambda + \lambda vm + 2 \mu) (\lambda vm + \mu in)}{(\lambda vm + \mu in)}$	$\lambda vm + \mu in'$	$(\lambda + \lambda vm + \mu) (2 \lambda + \lambda vm + 2 \mu)$	$(\lambda vm + \mu in)$
$\frac{\lambda vm (\lambda + \lambda vm + \mu) (2 \lambda + \lambda vm + 2 \mu) + 2 \lambda (\lambda + \lambda \lambda vm + 2 \mu)}{(\lambda + \lambda vm + \mu) (2 \lambda + \lambda vm + 2 \mu) (\lambda vm + 2 \mu) (\lambda vm + 2 \mu)}$	(vm + 2 μ) μi μin)	<u>n</u>	
$\frac{(\lambda + \lambda \mathbf{vm} + \mu)}{(\lambda + \lambda \mathbf{vm} + \mu)} \frac{(\lambda \mathbf{vm} + \mu)}{(\lambda \mathbf{vm} + \mu)} \frac{(\lambda \mathbf{vm} + \mu)}{(\lambda \mathbf{vm} + \mu)}$			

Figure 7. Cadeia de Markov e Fórmula Fechada pelo Mathematica