Gráficos de Controle (X, R, S, CUSUM e EWMA)

Jean Carlos Teixeira de Araujo

jcta@cin.ufpe.br

Universidade Federal de Pernambuco

Agenda

- **Introdução;**
- Gráficos X e R;
- Gráficos X e S;
- Gráfico CUSUM;
- Gráfico EWMA;
- Exemplos utilizando a ferramenta Minitab.

Introdução

- Se um produto deve corresponder às exigências do cliente, deve, em geral, ser produzido por um processo que seja estável ou replicável. Mais precisamente, o processo deve ser capaz de operar com pequena variabilidade em torno das dimensões-alvo ou nominais da características de qualidade do produto.

Introdução

- **O Controle Estatístico de Processo (CEP)** é uma poderosa coleção de ferramentas de solução de problemas útil, na obtenção da estabilidade do processo e na melhoria da capacidade através de redução da variabilidade.

CEP

Suas sete principais ferramentas são:

1. Apresentação em histogramas ou ramo-e-folhas;
2. Folha de controle;
3. Gráfico de Pareto;
4. Diagrama de causa-e-efeito;
5. Diagrama de concentração de defeito;
6. Diagrama de dispersão;
7. **Gráfico de controle.**

CEP

- Um dos objetivos do CEP é detectar rapidamente a ocorrência de causas atribuíveis das mudanças do processo, de modo que a investigação do processo e a ação corretiva possam ser realizadas antes que muitas unidades não conformes sejam fabricadas;

- Eliminar a variabilidade do processo.

Gráficos de Shewhart

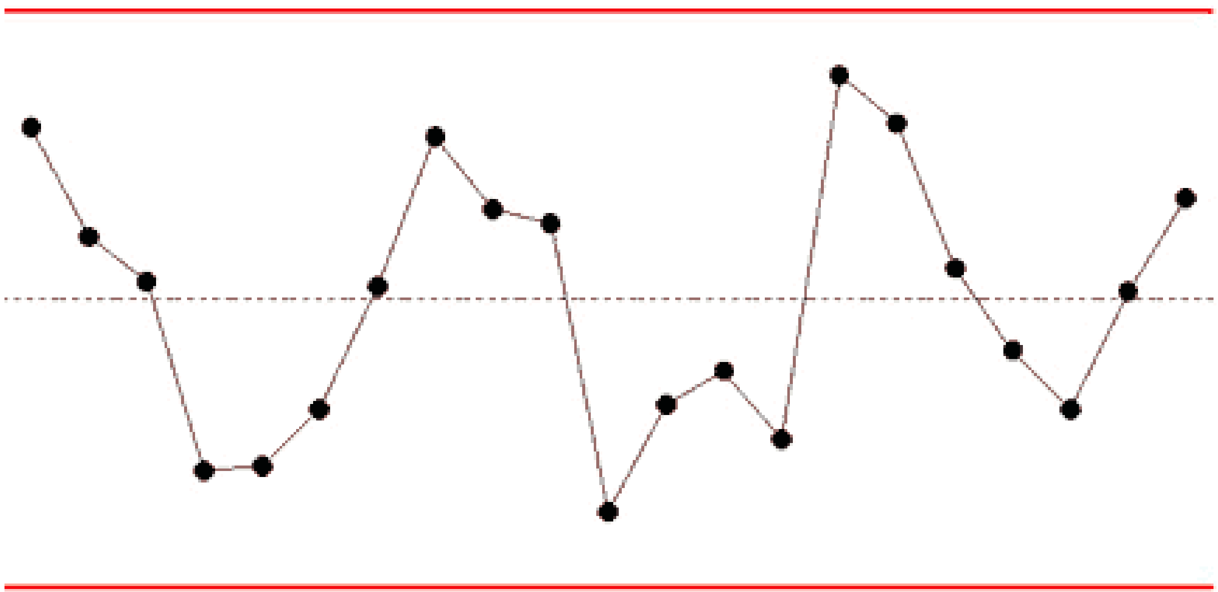
- O gráfico de controle de Shewhart é, provavelmente, o mais sofisticado tecnicamente. Ele foi desenvolvido nos anos 20 pelo Dr. Walter A. Shewhart.

- Muito do desenvolvimento daquela época ainda é aplicado em muitas empresas atualmente.

Princípios básicos

- **Linha central** – representa o valor médio da característica da qualidade que corresponde ao estado sob controle;
- **Limite superior de controle** e **limite inferior de controle** – são escolhidos de modo que, se o processo está sob controle, praticamente todos os pontos amostrais estarão entre eles.

Princípios básicos

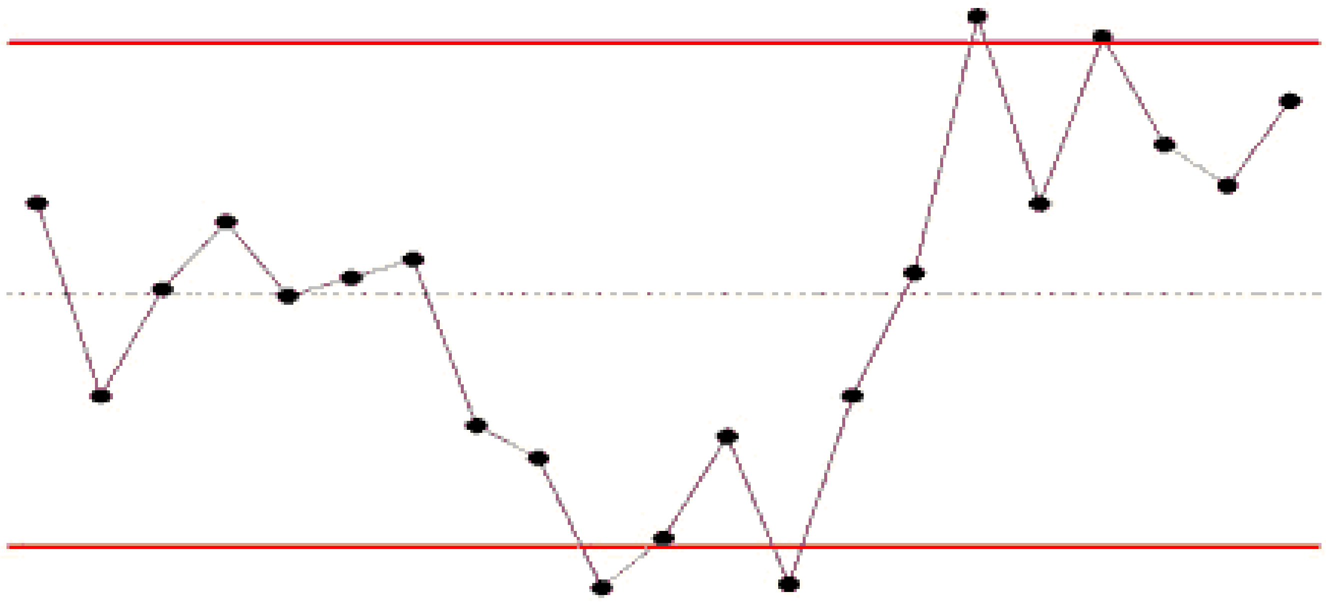


Stable

Princípios básicos

- Um ponto que caia fora dos limites do controle é interpretado como evidência de que o processo está fora de controle. A investigação e ação corretiva são necessárias para encontrar e eliminar a causa ou causas atribuíveis responsáveis por esse comportamento.

Princípios básicos



Unstable

Princípios básicos

- Mesmo que todos os pontos se situem entre os limites de controle, se eles se comportam de maneira sistemática ou não aleatória, então isso pode ser um indicação de que o processo está fora de controle.

Princípios básicos

- É costume unir os pontos amostrais no gráfico de controle por segmentos de reta , de modo a facilitar a visualização da evolução da sequência de pontos ao longo do tempo.

Gráficos de controle

- **Há pelo menos cinco razões para sua popularidade:**

1. **São uma técnica comprovada para a melhoria da produtividade** (sucata e retrabalho);
2. **São eficazes na prevenção de defeitos** (fazer certo);
3. **Evitam o ajuste desnecessário do processo** (se não está quebrado, não conserte);
4. **Fornecem informação de diagnóstico** (padrão dos pontos);
5. **Fornecem informação sobre capacidade** (estimável).

Agenda

- Introdução;
- **Gráficos X e R;**
- Gráficos X e S;
- Gráfico CUSUM;
- Gráfico EWMA;
- Exemplos utilizando a ferramenta Minitab.

Gráficos *X* e *R*

- Os gráficos de controle *X* e *R* são amplamente utilizados para monitorar a média e a variabilidade das variáveis.

Gráficos *X* e *R*

- Limites de controle para o Gráfico X

$$LSCX = \overline{\overline{X}} + A_2 * \overline{R}$$

$$LMCX = \overline{\overline{X}}$$

$$LICX = \overline{\overline{X}} - A_2 * \overline{R}$$

Gráficos *X* e *R*

- Limites de controle para o Gráfico *R*

$$LSCR = D_4 * \overline{R}$$
$$LMCR = \overline{R}$$
$$LICR = D_3 * \overline{R}$$

Gráficos *X* e *R*

- Onde:

$$\overline{\overline{X}} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}\overline{X}_i$$

- Sendo que $\overline{X}_i$ é a média da *i*-ésima amostra para *i = 1, 2, ..., m.*

Gráficos *X* e *R*

- Onde:

$$\overline{R} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} R_i \ ,$$

- Sendo, R_i é a amplitude (diferença entre o maior e o menor valor) para $i = 1, 2, ..., m$;
- Os valores de A2, D3 e D4 são obtidos através da tabela adequada em função de *n*.

Tabela A.1: Constantes para a Construção de Gráficos de Controle (Extraída de Montgomery, D.C. (1991a)).

Observações na Amostra, n	Gráficos para Médias					Gráficos para Desvio Padrão							Gráficos para Amplitudes			
	Fatores para os limites de controle			Fatores para a linha média		Fatores para os limites de controle.				Fatores para a linha média			Fatores para os limites de controle			
	A	A_2	A_3	c_4	$1/c_4$	B_3	B_4	B_5	B_6	d_2	$1/d_2$	d_3	D_1	D_2	D_3	D_4
2	2,121	1,880	2,659	0,7979	1,2533	0	3,267	0	2,606	1,128	0,8865	0,853	0	3,686	0	3,267
3	1,732	1,023	1,954	0,8862	1,1284	0	2,568	0	2,276	1,693	0,5907	0,888	0	4,358	0	2,575
4	1,500	0,729	1,628	0,9213	1,0854	0	2,266	0	2,088	2,059	0,4857	0,880	0	4,698	0	2,282
5	1,342	0,577	1,427	0,9400	1,0638	0	2,089	0	1,964	2,326	0,4299	0,864	0	4,918	0	2,115
6	1,225	0,483	1,287	0,9515	1,0510	0,030	1,970	0,029	1,874	2,534	0,3946	0,848	0	5,078	0	2,004
7	1,134	0,419	1,182	0,9594	1,0423	0,118	1,882	0,113	1,806	2,704	0,3698	0,833	0,204	5,204	0,076	1,924
8	1,061	0,373	1,099	0,9650	1,0363	0,185	1,815	0,179	1,751	2,847	0,3512	0,820	0,388	5,306	0,136	1,864
9	1,000	0,337	1,032	0,9693	1,0317	0,239	1,761	0,232	1,707	2,970	0,3367	0,808	0,547	5,393	0,184	1,816
10	0,949	0,308	0,975	0,9727	1,0281	0,284	1,716	0,276	1,669	3,078	0,3249	0,797	0,687	5,469	0,223	1,777
11	0,905	0,285	0,927	0,9754	1,0252	0,321	1,679	0,313	1,637	3,173	0,3152	0,787	0,811	5,535	0,256	1,744
12	0,866	0,266	0,886	0,9776	1,0229	0,354	1,646	0,346	1,610	3,258	0,3069	0,778	0,922	5,594	0,283	1,717
13	0,832	0,249	0,850	0,9794	1,0210	0,382	1,618	0,374	1,585	3,336	0,2998	0,770	1,025	5,647	0,307	1,693
14	0,802	0,235	0,817	0,9810	1,0194	0,406	1,594	0,399	1,563	3,407	0,2935	0,763	1,118	5,696	0,328	1,672
15	0,775	0,223	0,789	0,9823	1,0180	0,428	1,572	0,421	1,544	3,472	0,2880	0,756	1,203	5,741	0,347	1,653
16	0,750	0,212	0,763	0,9835	1,0168	0,448	1,552	0,440	1,526	3,532	0,2831	0,750	1,282	5,782	0,363	1,637
17	0,728	0,203	0,739	0,9845	1,0157	0,466	1,534	0,458	1,511	3,588	0,2787	0,744	1,356	5,820	0,378	1,622
18	0,707	0,194	0,718	0,9854	1,0148	0,482	1,518	0,475	1,496	3,640	0,2747	0,739	1,424	5,856	0,391	1,608
19	0,688	0,187	0,698	0,9862	1,0140	0,497	1,503	0,490	1,483	3,689	0,2711	0,734	1,487	5,891	0,403	1,597
20	0,671	0,180	0,680	0,9869	1,0133	0,510	1,490	0,504	1,470	3,735	0,2677	0,729	1,549	5,921	0,415	1,585
21	0,655	0,173	0,663	0,9876	1,0126	0,523	1,477	0,516	1,459	3,778	0,2647	0,724	1,605	5,951	0,425	1,575
22	0,640	0,167	0,647	0,9882	1,0119	0,534	1,466	0,528	1,448	3,819	0,2618	0,720	1,659	5,979	0,434	1,566
23	0,626	0,162	0,633	0,9887	1,0114	0,545	1,455	0,539	1,438	3,858	0,2592	0,716	1,710	6,006	0,443	1,557
24	0,612	0,157	0,619	0,9892	1,0109	0,555	1,445	0,549	1,429	3,895	0,2567	0,712	1,759	6,031	0,451	1,548
25	0,600	0,153	0,606	0,9896	1,0105	0,565	1,435	0,559	1,420	3,931	0,2544	0,708	1,806	6,056	0,459	1,541

Para $n > 25$

$A = \frac{3}{\sqrt{n}}$ $\quad A_3 = \frac{3}{c_4\sqrt{n}}$ $\quad c_4 \cong \frac{4(n-1)}{4n-3}$ $\quad B_3 = 1 - \frac{3}{c_4\sqrt{2(n-1)}}$ $\quad B_4 = 1 + \frac{3}{c_4\sqrt{2(n-1)}}$ $\quad B_5 = c_4 - \frac{3}{\sqrt{2(n-1)}}$ $\quad B_6 = c_4 + \frac{3}{\sqrt{2(n-1)}}$

Exemplo 1

- Anéis de pistão para motores de automóveis são produzidos por um processo de forja. Queremos estabelecer um controle estatístico para o diâmetro interno dos anéis produzidos por esse processo usando gráficos *X* e *R*. Vinte e cinco amostras, cada uma de tamanho cinco, foram extraídas desse processo quando se pensava que o mesmo estava sob controle. As medidas dos diâmetros internos dessas amostras são exibidas na tabela a seguir:

Exemplo 1

Amostras	X1	X2	X3	X4	X5	X Médio	R
1	74,030	74,002	74,019	73,992	74,008	74,010	0,038
2	73,995	73,992	74,001	74,011	74,004	74,001	0,019
3	73,988	74,024	74,021	74,005	74,002	74,008	0,036
4	74,002	73,996	73,993	74,015	74,009	74,003	0,022
5	73,992	74,007	74,015	73,989	74,014	74,003	0,026
6	74,009	73,994	73,997	73,985	73,993	73,996	0,024
7	73,995	74,006	73,994	74,000	74,005	74,000	0,012
8	73,985	74,003	73,993	74,015	73,988	73,997	0,030
9	74,008	73,995	74,009	74,005	74,004	74,004	0,014
10	73,998	74,000	73,990	74,007	73,995	73,998	0,017
11	73,994	73,998	73,994	73,995	73,990	73,994	0,008
...	...	...	...	...	...	...	...

Exemplo 1

Amostras	X1	X2	X3	X4	X5	X Médio	R
...	...	...	...	...	...	...	...
17	73,994	74,012	73,986	74,005	74,007	74,001	0,026
18	74,006	74,010	74,018	74,003	74,000	74,007	0,018
19	73,984	74,002	74,003	74,005	73,997	73,998	0,021
20	74,000	74,010	74,013	74,020	74,003	74,009	0,020
21	73,982	74,001	74,015	74,005	73,996	74,000	0,033
22	74,004	73,999	73,99	74,006	74,009	74,002	0,019
23	74,010	73,989	73,99	74,009	74,014	74,002	0,025
24	74,015	74,008	73,993	74,000	74,010	74,005	0,022
25	73,982	73,984	73,995	74,017	74,013	73,998	0,035
					Somatório:	**1850,028**	**0,581**
					Média:	**74,001**	**0,023**

Exemplo 1

- Usando os dados da tabela, determinamos a **linha central** para o gráfico R:

$$R = \frac{\sum_{i=1}^{25} R_1}{25} = \frac{0{,}581}{25} = 0{,}023$$

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

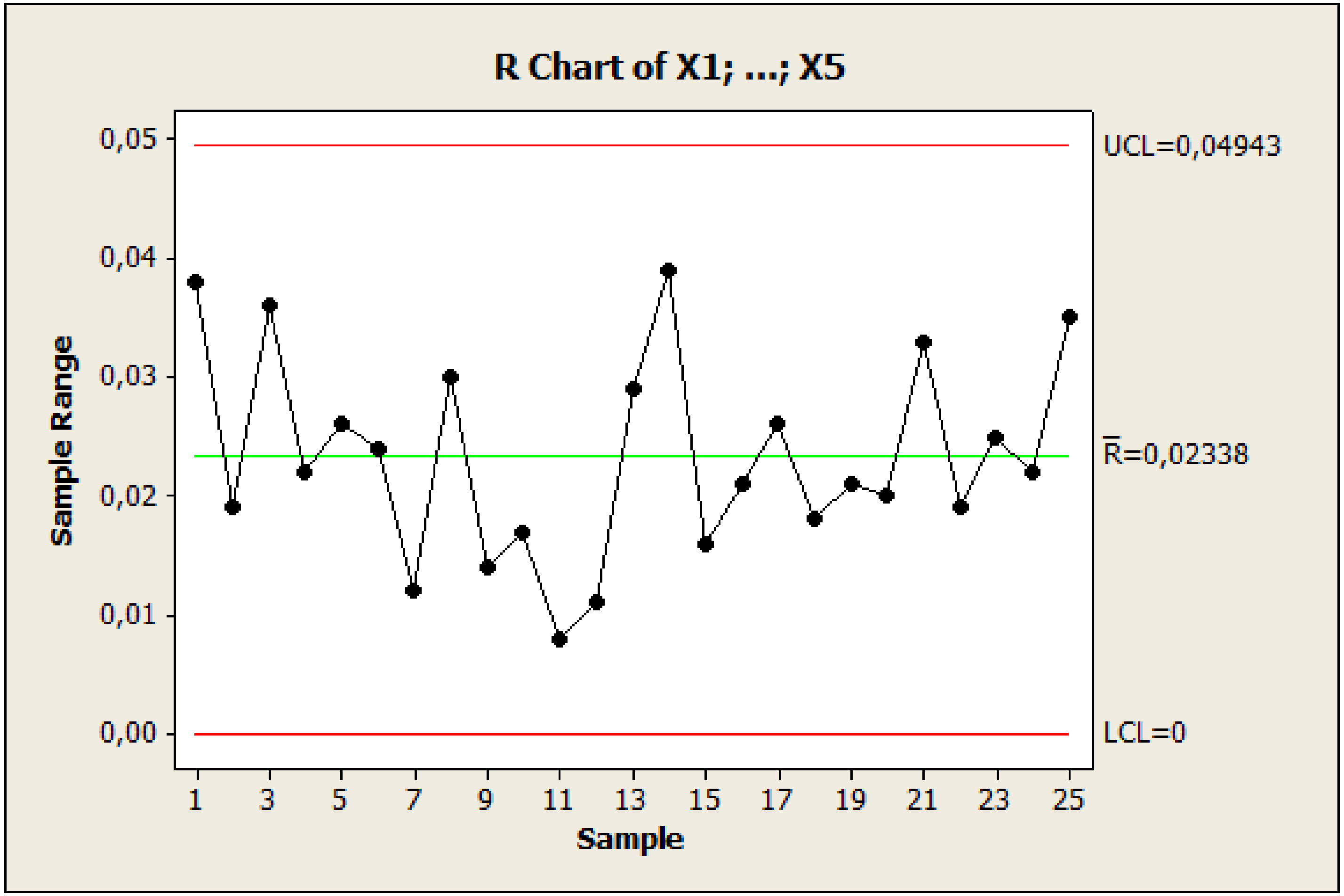
Exemplo 1

- Para amostras com n = 5, encontramos na tabela de constantes que D3 = 0 e D4 = 2,115.

$$LIC = D_3 R = (0)0{,}023 = 0$$

$$LSC = D_4 R = (2{,}115)0{,}023 = 0{,}049$$

Exemplo 1



Universidade Federal de Pernambuco

Exemplo 1

- Como o gráfico *R* indica que a variabilidade do processo encontra-se sob controle, podemos agora construir o gráfico *X*. A linha central é:

$$X = \frac{\sum_{i=1}^{25} X_1}{25} = \frac{1850{,}028}{25} = 74{,}001$$

Exemplo 1

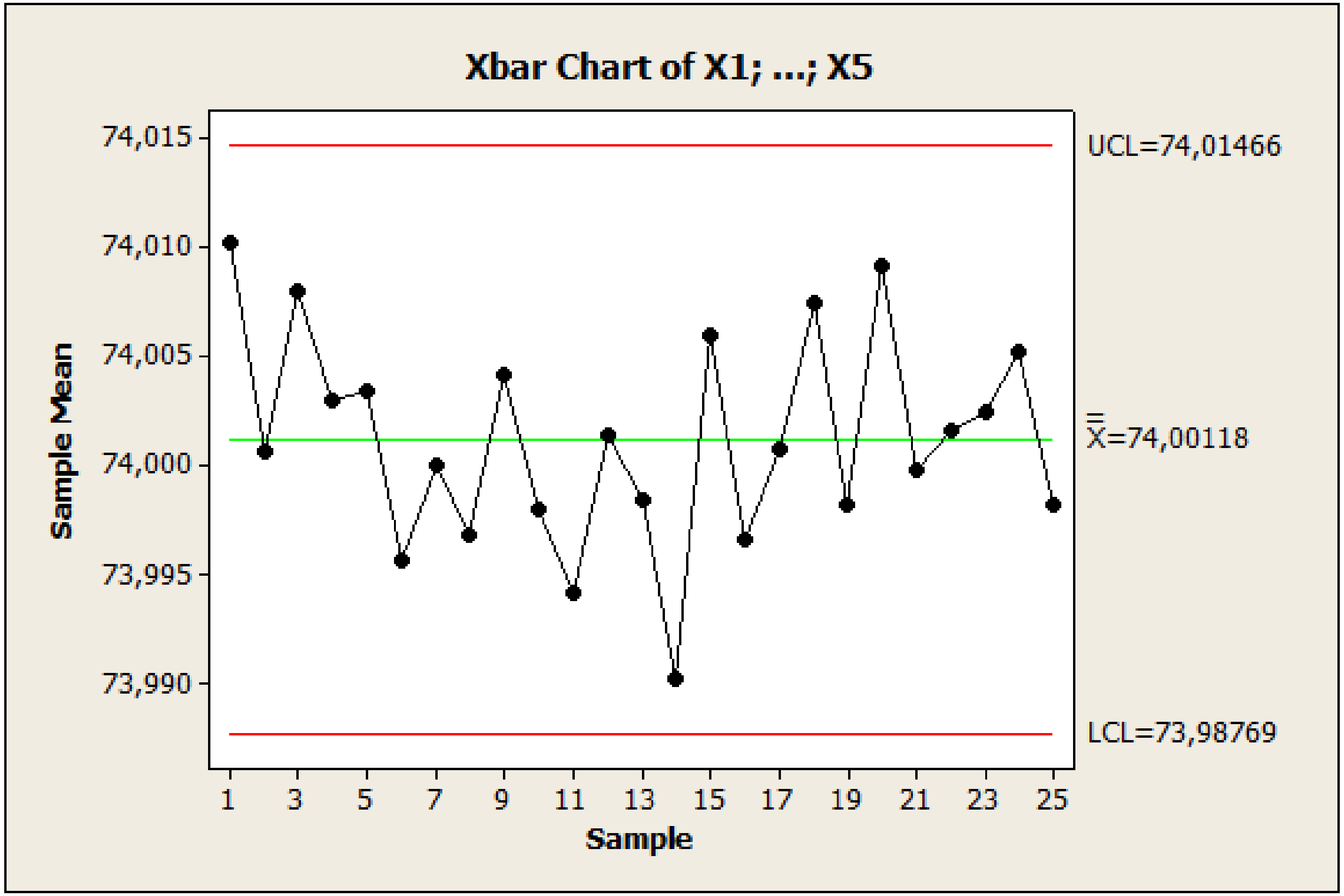
- Para os limites de controle para o gráfico X, usamos novamente a tabela de constantes, *A2 = 0,577* para amostras de tamanho *n = 5*.

$$LSC = X + A_2 R = 74{,}001 + (0{,}577)(0{,}023) = 74{,}014$$

$$LIC = X - A_2 R = 74{,}001 - (0{,}577)(0{,}023) = 73{,}988$$

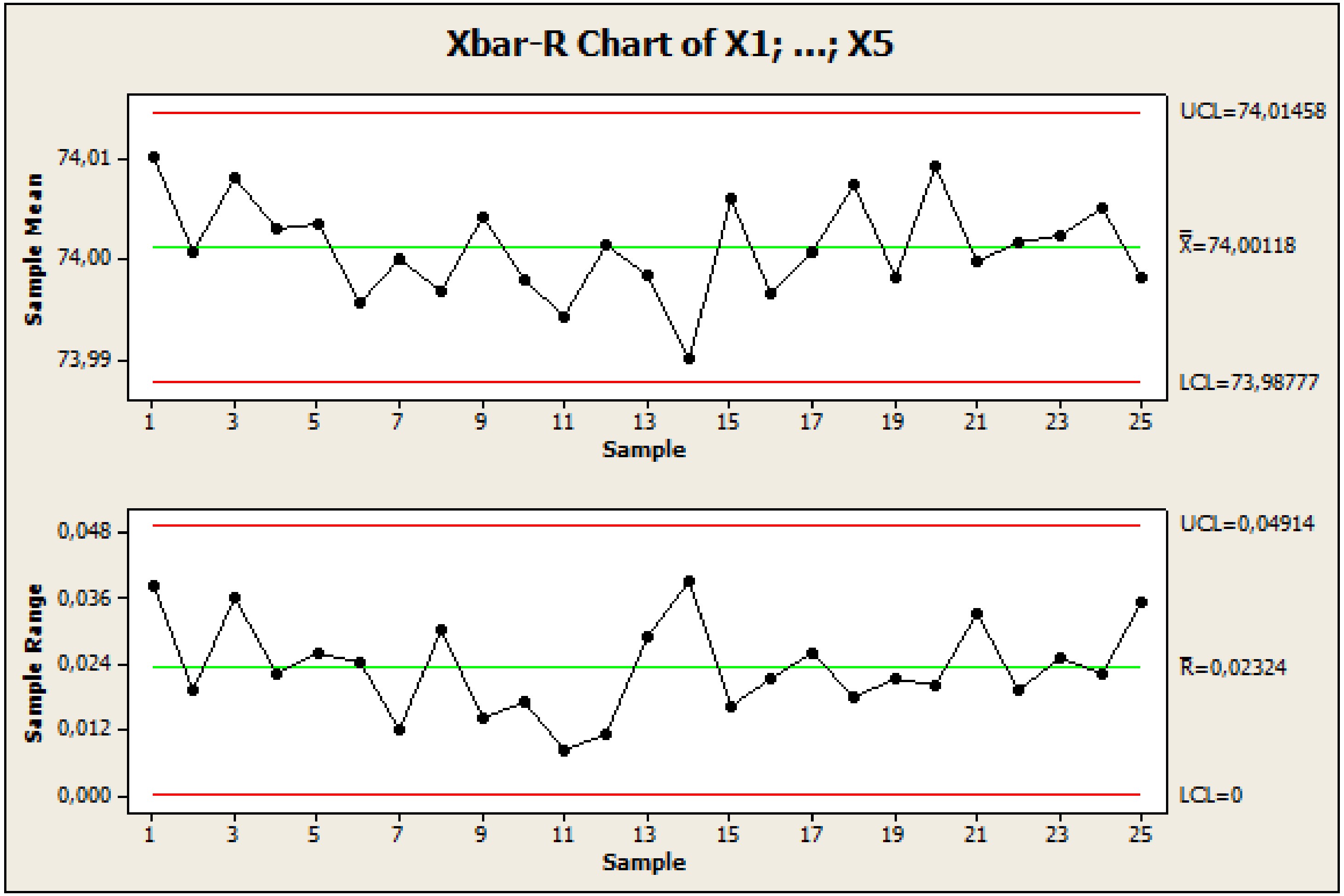
UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

Exemplo 1



Xbar Chart of X1; ...; X5
74,015
74,010
74,005
74,000
73,995
73,990
Sample Mean
UCL=74,01466
X̿=74,00118
LCL=73,98769
1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25
Sample

Exemplo 1



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

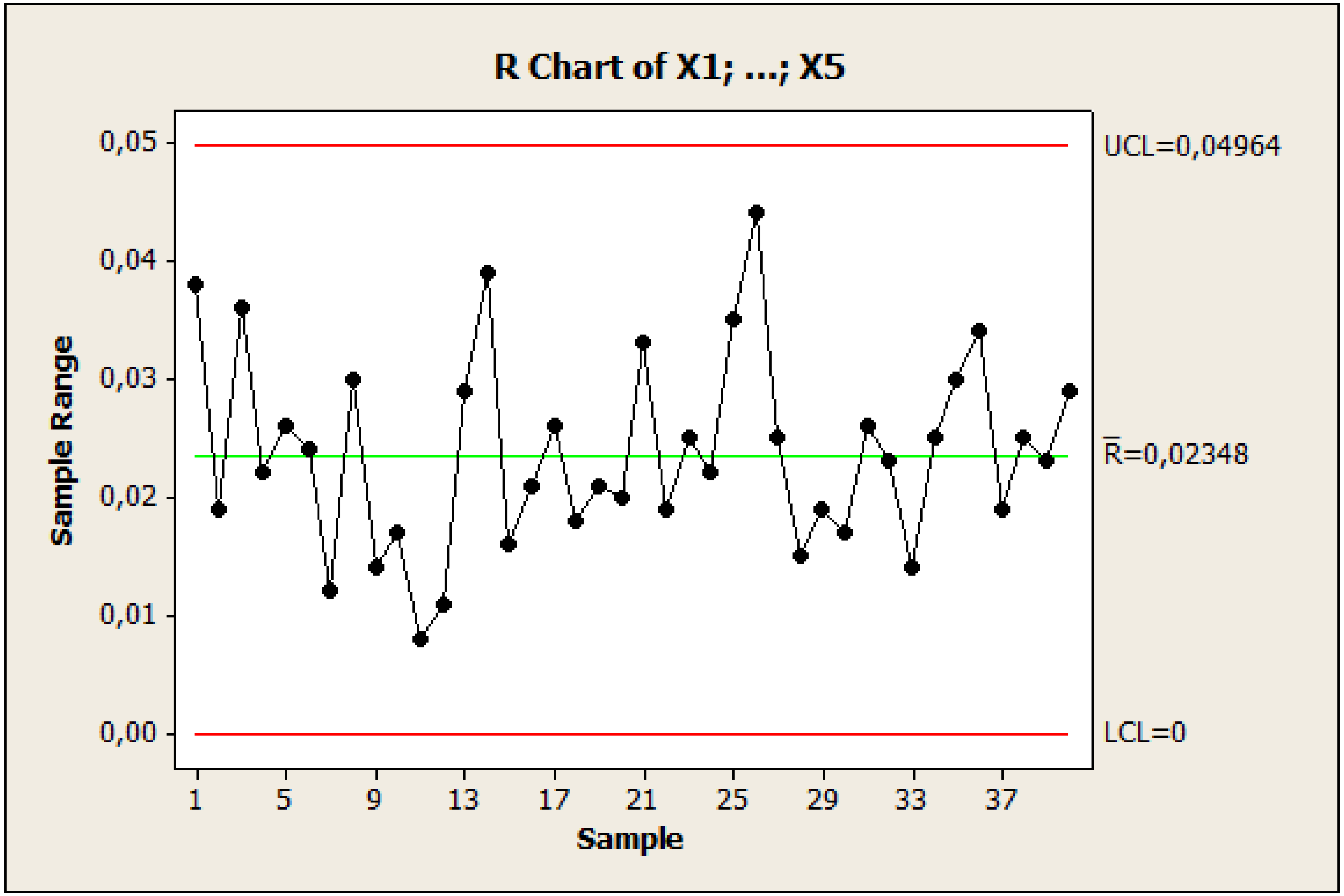
Exemplo 2

- Quinze amostras adicionais do processo de produção de anéis de pistão foram coletadas depois de estabelecido os gráficos de controle. Os dados para essas novas amostras podem ser observados na tabela a seguir:

Exemplo 2

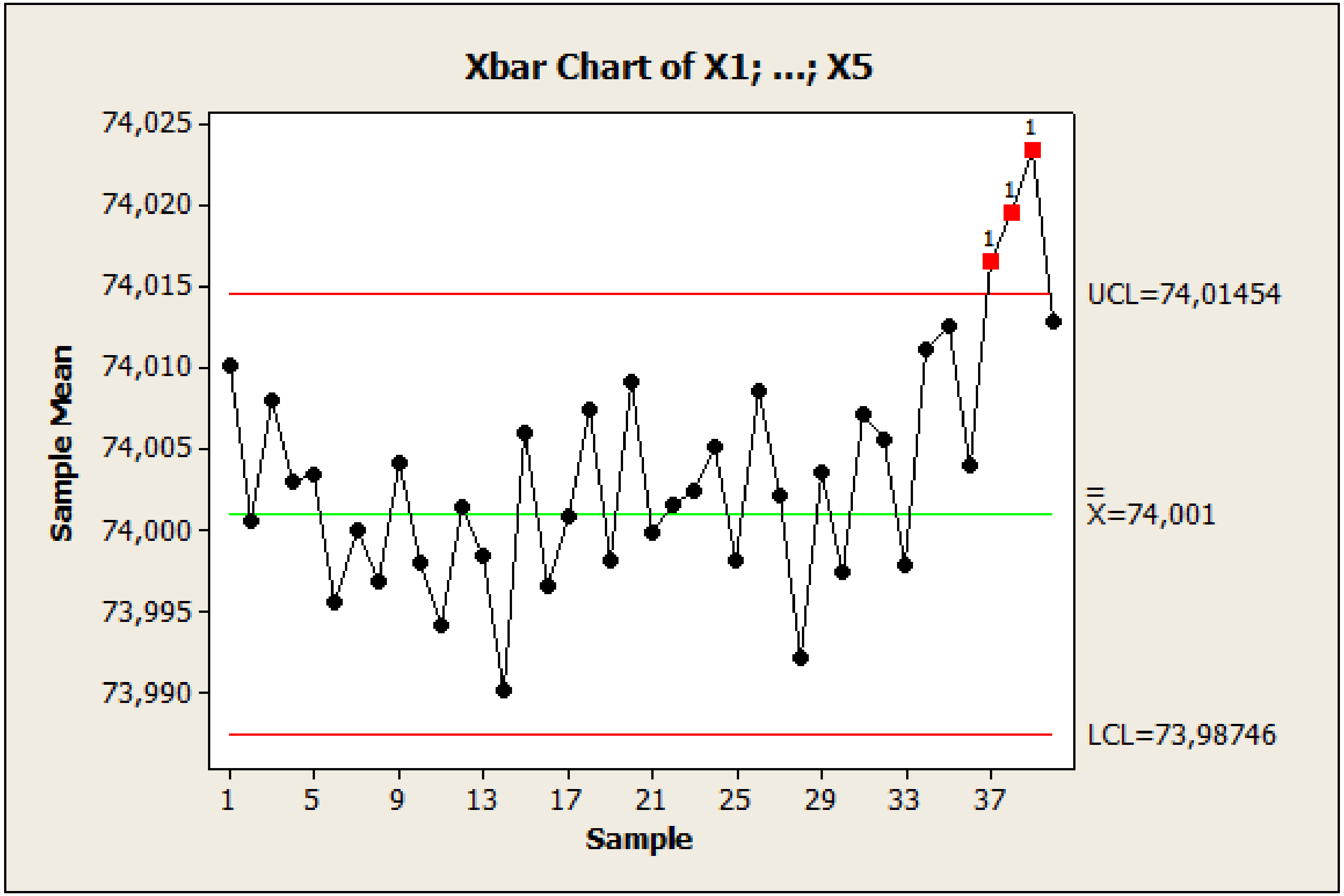
Amostras	X1	X2	X3	X4	X5	X Médio	R
...	...	...	...	...	...	...	...
30	74,003	74,000	74,001	73,986	73,997	73,997	0,017
31	73,994	74,003	74,015	74,020	74,004	74,007	0,026
32	74,008	74,002	74,018	73,995	74,005	74,006	0,023
33	74,001	74,004	73,990	73,996	73,998	73,998	0,014
34	74,015	74,000	74,016	74,025	74,000	74,011	0,025
35	74,030	74,005	74,000	74,016	74,012	74,013	0,030
36	74,001	73,99	73,995	74,010	74,024	74,004	0,034
37	74,015	74,02	74,024	74,005	74,019	74,017	0,019
38	74,035	74,01	74,012	74,015	74,026	74,020	0,025
39	74,017	74,013	74,036	74,025	74,026	74,023	0,023
40	74,010	74,005	74,029	74,000	74,020	74,013	0,029

Exemplo 2



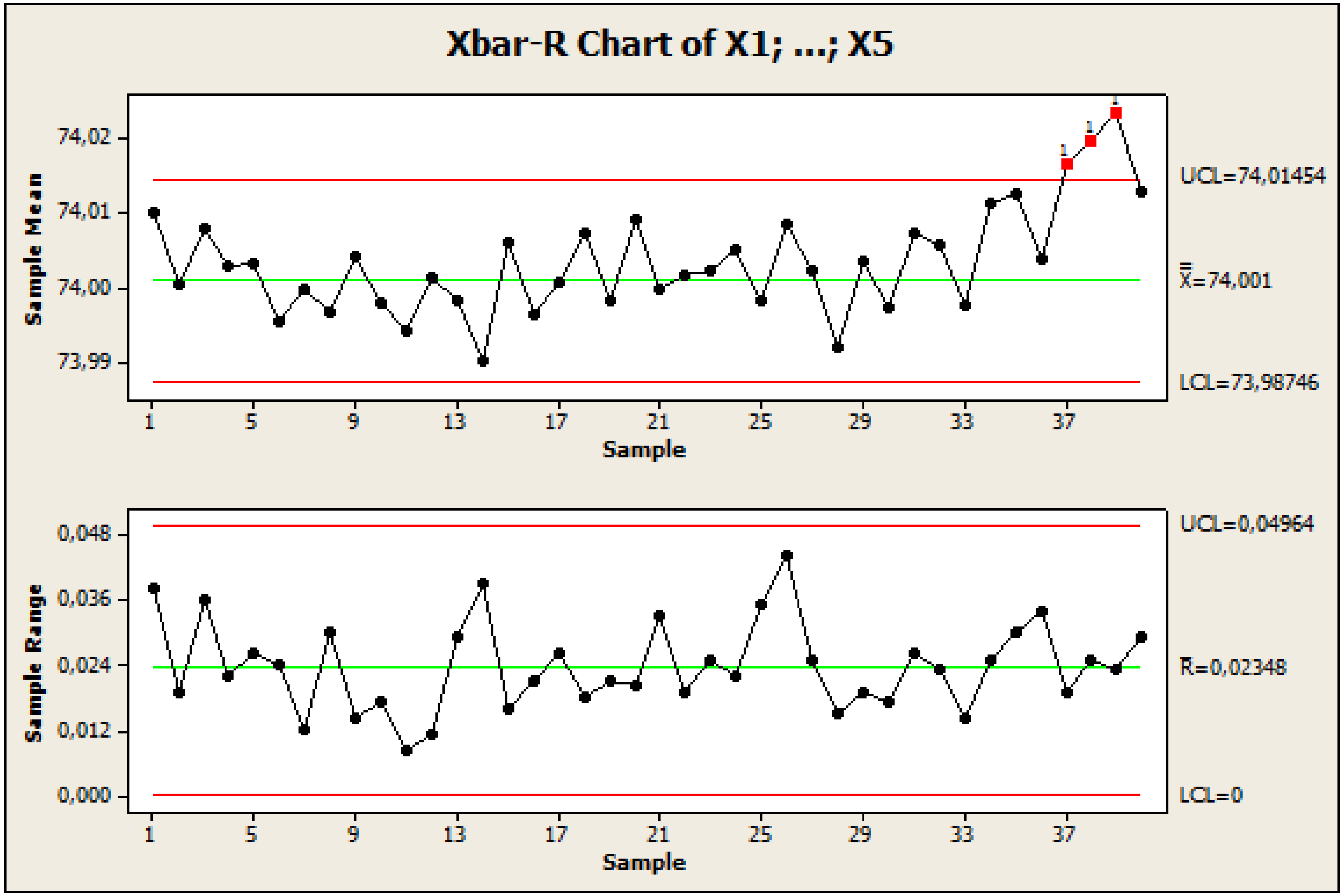
R Chart of X1; ...; X5
Sample Range
0,05
0,04
0,03
0,02
0,01
0,00
UCL=0,04964
$\bar{R}$=0,02348
LCL=0
1
5
9
13
17
21
25
29
33
37
Sample

Exemplo 2



Xbar Chart of X1; ...; X5
74,025
74,020
74,015
74,010
74,005
74,000
73,995
73,990
Sample Mean
1
1
1
UCL=74,01454
X=74,001
LCL=73,98746
1
5
9
13
17
21
25
29
33
37
Sample

Exemplo 2



Xbar-R Chart of X1; ...; X5
74,02
74,01
74,00
73,99
Sample Mean
UCL=74,01454
X̿=74,001
LCL=73,98746
1 5 9 13 17 21 25 29 33 37
Sample
0,048
0,036
0,024
0,012
0,000
Sample Range
UCL=0,04964
R̄=0,02348
LCL=0
1 5 9 13 17 21 25 29 33 37
Sample

Agenda

- Introdução;
- Gráficos X e R;
- **Gráficos X e S;**
- Gráfico CUSUM;
- Gráfico EWMA;
- Exemplos utilizando a ferramenta Minitab.

Gráficos *X* e *S*

- Embora os gráficos X e R sejam bastante utilizados, algumas vezes torna-se desejável estimar diretamente através do uso da amplitude R. Isso leva aos gráficos de controle *X* e *S*, onde *S* é o desvio padrão amostral.

Gráficos *X* e *S*

- Em geral, os gráficos *X* e *S* são preferidos aos seus semelhantes *X* e *R* quando:

1. Ou o tamanho da amostra n é moderadamente grande – digamos $n > 10$ ou 12;
2. Ou o tamanho da amostra *n* é variável.

Gráficos *X* e *S*

- Limites de controle para o Gráfico X

$$LSCX = \overline{\overline{X}} + A_3 * \bar{s}$$

$$LMCX = \overline{\overline{X}}$$

$$LICX = \overline{\overline{X}} - A_3 * \bar{s}$$

Gráficos *X* e *S*

- Limites de controle para o Gráfico *S*

$$LSCs = B_4 * \bar{s}$$
$$LMCs = \bar{s}$$
$$LICs = B_3 * \bar{s}$$

Gráficos *X* e *S*

- Onde:

$$\bar{\bar{X}} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} \bar{X}_i$$

- Sendo que $\bar{X}_i$ é a média da *i*-ésima amostra para *i = 1, 2, ..., m.*

$$\bar{s} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} S_i$$

Gráficos *X* e *S*

- Sendo, S_i é o desvio padrão para *i = 1, 2, ..., m*;

$$S_i = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(X_{ij} - \bar{X}_i)^2}$$

- Os valores de A3, B3 e B4 são obtidos através da tabela de constantes.

Exemplo 3

- Utilizando a mesma tabela de amostras do exemplo 1, podemos estimar o valor *S*:

Amostras	S
1	0,0148
2	0,0046
3	0,0147
4	0,0091
5	0,0122
6	0,0099
7	0,0055
8	0,0123
9	0,0064
10	0,0063
11	0,0029
...	...

Amostras	S
...	...
15	0,0087
16	0,0078
17	0,0115
18	0,0070
19	0,0085
20	0,0068
21	0,0122
22	0,0074
23	0,0119
24	0,0087
25	0,0162

Amostras	S
Soma	0,2350
Média Geral	0,0094

Exemplo 3

- A média geral e o desvio padrão são:

$$X = \frac{1}{25}\sum_{i=1}^{25} X_1 = \frac{1}{25}(1850,028) = 74,001$$

$$e$$

$$S = \frac{1}{25}\sum_{i=1}^{25} S_1 = \frac{1}{25}(0,2350) = 0,0094$$

Exemplo 3

- Os parâmetros para o gráfico X são:

$$LSC = X + A_3 S = 74{,}001 + (1{,}427)(0{,}0094) = 74{,}014$$

$$LC = X = 74{,}001$$

$$LIC = X - A_3 S = 74{,}001 - (1{,}427)(0{,}0094) = 73{,}988$$

Tabela A.1: Constantes para a Construção de Gráficos de Controle (Extraída de Montgomery, D.C. (1991a)).

Observações na Amostra, n	Gráficos para Médias					Gráficos para Desvio Padrão				Gráficos para Amplitudes						
	Fatores para os limites de controle			Fatores para a linha média		Fatores para os limites de controle.				Fatores para a linha média			Fatores para os limites de controle			
	A	A_2	A_3	c_4	$1/c_4$	B_3	B_4	B_5	B_6	d_2	$1/d_2$	d_3	D_1	D_2	D_3	D_4
2	2,121	1,880	2,659	0,7979	1,2533	0	3,267	0	2,606	1,128	0,8865	0,853	0	3,686	0	3,267
3	1,732	1,023	1,954	0,8862	1,1284	0	2,568	0	2,276	1,693	0,5907	0,888	0	4,358	0	2,575
4	1,500	0,729	1,628	0,9213	1,0854	0	2,266	0	2,088	2,059	0,4857	0,880	0	4,698	0	2,282
5	1,342	0,577	1,427	0,9400	1,0638	0	2,089	0	1,964	2,326	0,4299	0,864	0	4,918	0	2,115
6	1,225	0,483	1,287	0,9515	1,0510	0,030	1,970	0,029	1,874	2,534	0,3946	0,848	0	5,078	0	2,004
7	1,134	0,419	1,182	0,9594	1,0423	0,118	1,882	0,113	1,806	2,704	0,3698	0,833	0,204	5,204	0,076	1,924
8	1,061	0,373	1,099	0,9650	1,0363	0,185	1,815	0,179	1,751	2,847	0,3512	0,820	0,388	5,306	0,136	1,864
9	1,000	0,337	1,032	0,9693	1,0317	0,239	1,761	0,232	1,707	2,970	0,3367	0,808	0,547	5,393	0,184	1,816
10	0,949	0,308	0,975	0,9727	1,0281	0,284	1,716	0,276	1,669	3,078	0,3249	0,797	0,687	5,469	0,223	1,777
11	0,905	0,285	0,927	0,9754	1,0252	0,321	1,679	0,313	1,637	3,173	0,3152	0,787	0,811	5,535	0,256	1,744
12	0,866	0,266	0,886	0,9776	1,0229	0,354	1,646	0,346	1,610	3,258	0,3069	0,778	0,922	5,594	0,283	1,717
13	0,832	0,249	0,850	0,9794	1,0210	0,382	1,618	0,374	1,585	3,336	0,2998	0,770	1,025	5,647	0,307	1,693
14	0,802	0,235	0,817	0,9810	1,0194	0,406	1,594	0,399	1,563	3,407	0,2935	0,763	1,118	5,696	0,328	1,672
15	0,775	0,223	0,789	0,9823	1,0180	0,428	1,572	0,421	1,544	3,472	0,2880	0,756	1,203	5,741	0,347	1,653
16	0,750	0,212	0,763	0,9835	1,0168	0,448	1,552	0,440	1,526	3,532	0,2831	0,750	1,282	5,782	0,363	1,637
17	0,728	0,203	0,739	0,9845	1,0157	0,466	1,534	0,458	1,511	3,588	0,2787	0,744	1,356	5,820	0,378	1,622
18	0,707	0,194	0,718	0,9854	1,0148	0,482	1,518	0,475	1,496	3,640	0,2747	0,739	1,424	5,856	0,391	1,608
19	0,688	0,187	0,698	0,9862	1,0140	0,497	1,503	0,490	1,483	3,689	0,2711	0,734	1,487	5,891	0,403	1,597
20	0,671	0,180	0,680	0,9869	1,0133	0,510	1,490	0,504	1,470	3,735	0,2677	0,729	1,549	5,921	0,415	1,585
21	0,655	0,173	0,663	0,9876	1,0126	0,523	1,477	0,516	1,459	3,778	0,2647	0,724	1,605	5,951	0,425	1,575
22	0,640	0,167	0,647	0,9882	1,0119	0,534	1,466	0,528	1,448	3,819	0,2618	0,720	1,659	5,979	0,434	1,566
23	0,626	0,162	0,633	0,9887	1,0114	0,545	1,455	0,539	1,438	3,858	0,2592	0,716	1,710	6,006	0,443	1,557
24	0,612	0,157	0,619	0,9892	1,0109	0,555	1,445	0,549	1,429	3,895	0,2567	0,712	1,759	6,031	0,451	1,548
25	0,600	0,153	0,606	0,9896	1,0105	0,565	1,435	0,559	1,420	3,931	0,2544	0,708	1,806	6,056	0,459	1,541

Para $n > 25$

$A = \frac{3}{\sqrt{n}}$ $\quad A_3 = \frac{3}{c_4\sqrt{n}}$ $\quad c_4 \cong \frac{4(n-1)}{4n-3}$ $\quad B_3 = 1 - \frac{3}{c_4\sqrt{2(n-1)}}$ $\quad B_4 = 1 + \frac{3}{c_4\sqrt{2(n-1)}}$ $\quad B_5 = c_4 - \frac{3}{\sqrt{2(n-1)}}$ $\quad B_6 = c_4 + \frac{3}{\sqrt{2(n-1)}}$

Exemplo 3

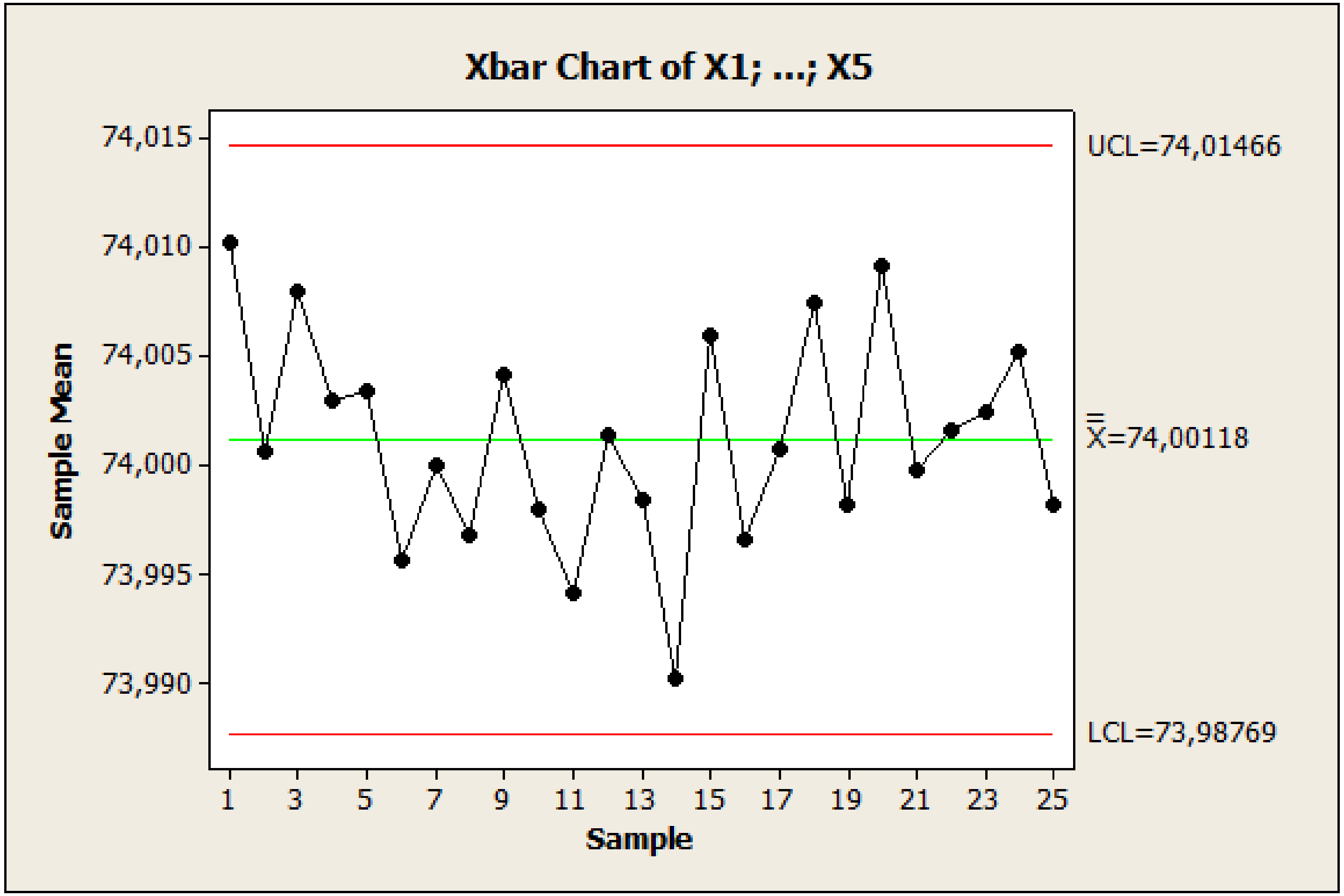
- Os parâmetros para o gráfico S são:

$$LSC = B_4 \bar{S} = (2{,}089)(0{,}0094) = 0{,}0196$$

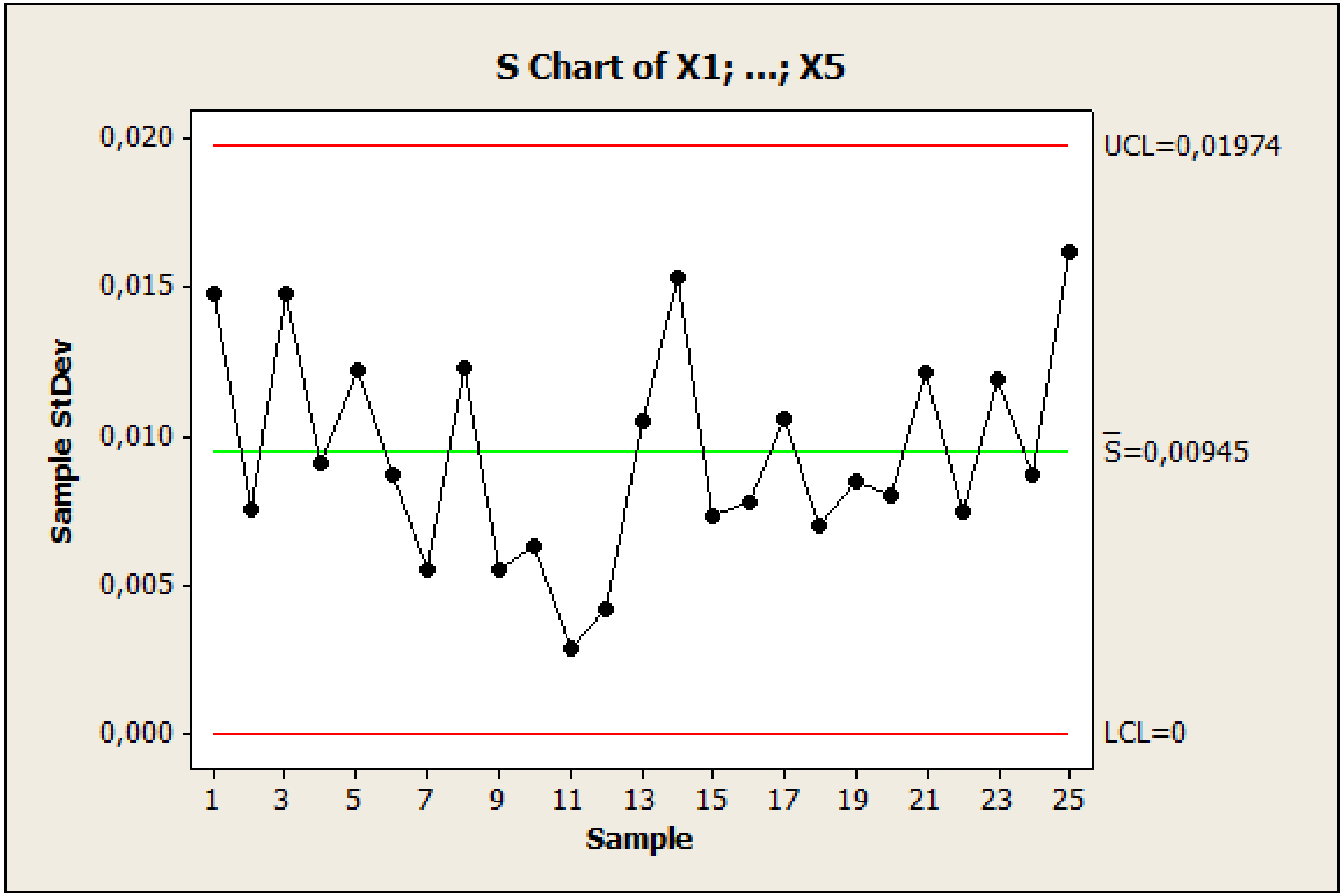
$$LC = \bar{S} = 0{,}0094$$

$$LIC = B_3 \bar{S} = (0)(0{,}0094) = 0$$

Exemplo 3

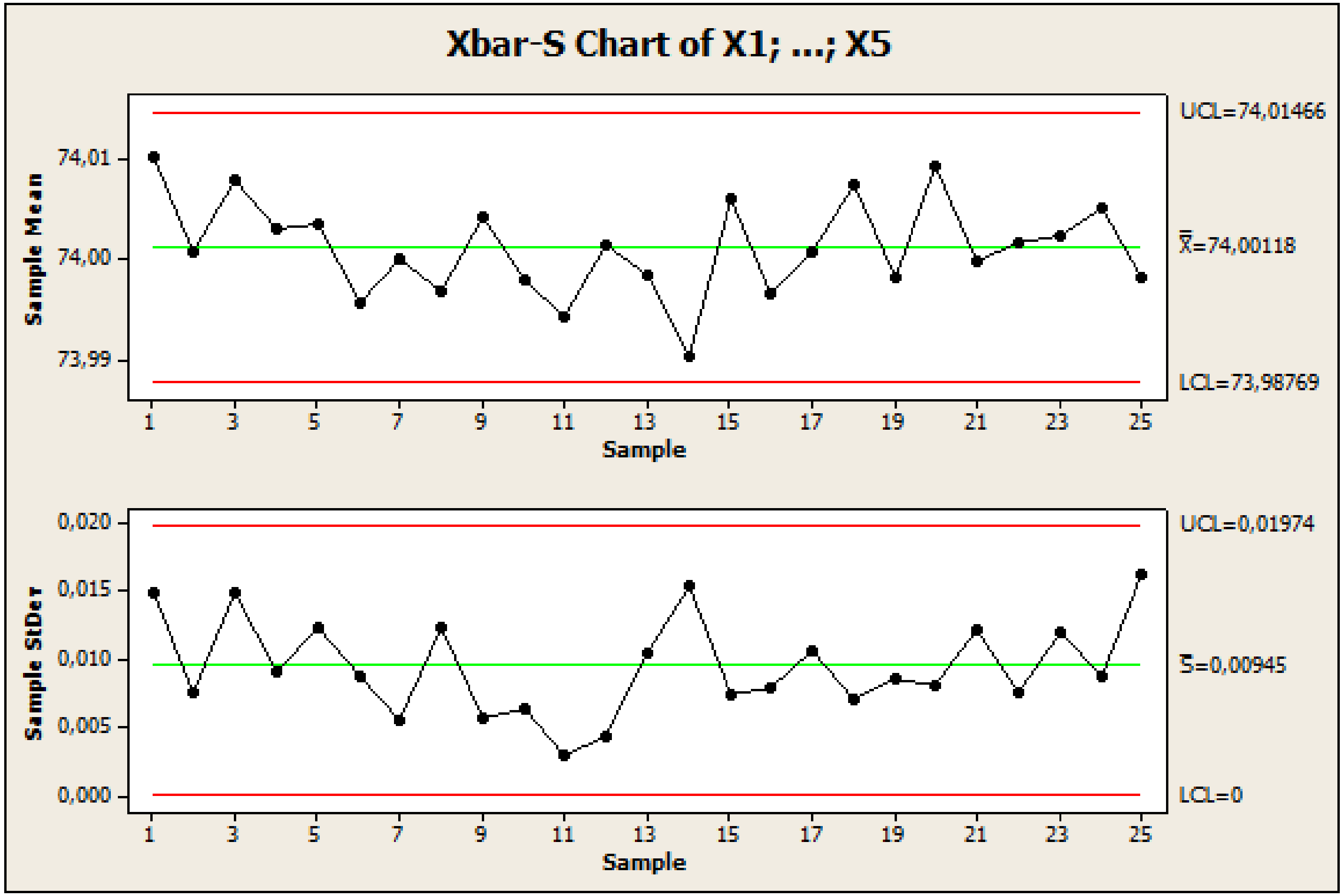

Xbar Chart of X1; ...; X5
74,015
74,010
74,005
74,000
73,995
73,990
Sample Mean
UCL=74,01466
X̿=74,00118
LCL=73,98769
1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25
Sample

Exemplo 3



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

Exemplo 3



Xbar-S Chart of X1; ...; X5
Sample Mean
74,01
74,00
73,99
UCL=74,01466
X̿=74,00118
LCL=73,98769
1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25
Sample
Sample StDev
0,020
0,015
0,010
0,005
0,000
UCL=0,01974
S̄=0,00945
LCL=0
1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25
Sample

Agenda

- Introdução;
- Gráficos X e R;
- Gráficos X e S;
- **Gráfico CUSUM;**
- Gráfico EWMA;
- Exemplos utilizando a ferramenta Minitab.

Gráfico CUSUM

- O gráfico CUSUM, é uma boa alternativa quando estamos interessados em detectar pequenas mudanças.
- Incorpora diretamente toda a informação na sequência dos valores da amostra , plotando as somas cumulativas dos desvios dos valores da amostra de um valor-alvo.

$$C_i = \sum_{j=1}^{i} (X_j - \mu_0)$$

Gráfico CUSUM

- Considerando os dados da tabela abaixo:

Amostra	X	X-10	C=(X-10)+(C-1)
1	9,45	-0,55	-0,55
2	7,99	-2,01	-2,56
3	9,29	-0,71	-3,27
4	11,66	1,66	-1,61
5	12,16	2,16	0,55
6	10,18	0,18	0,73
7	8,04	-1,96	-1,23
8	11,46	1,46	0,23
9	9,20	-0,80	-0,57
10	10,34	0,34	-0,23
11	9,03	-0,97	-1,20
...	...	...	...

Gráfico CUSUM

Amostra	X	X-10	C=(X-10)+(C-1)
...	...	...	...
19	8,52	-1,48	-0,92
20	10,84	0,84	-0,08
21	10,90	0,90	0,82
22	9,33	-0,67	0,15
23	12,29	2,29	2,44
24	11,50	1,50	3,94
25	10,60	0,60	4,54
26	11,08	1,08	5,62
27	10,38	0,38	6,00
28	11,62	1,62	7,62
29	11,31	1,31	8,93
30	10,52	0,52	9,45

Gráfico CUSUM

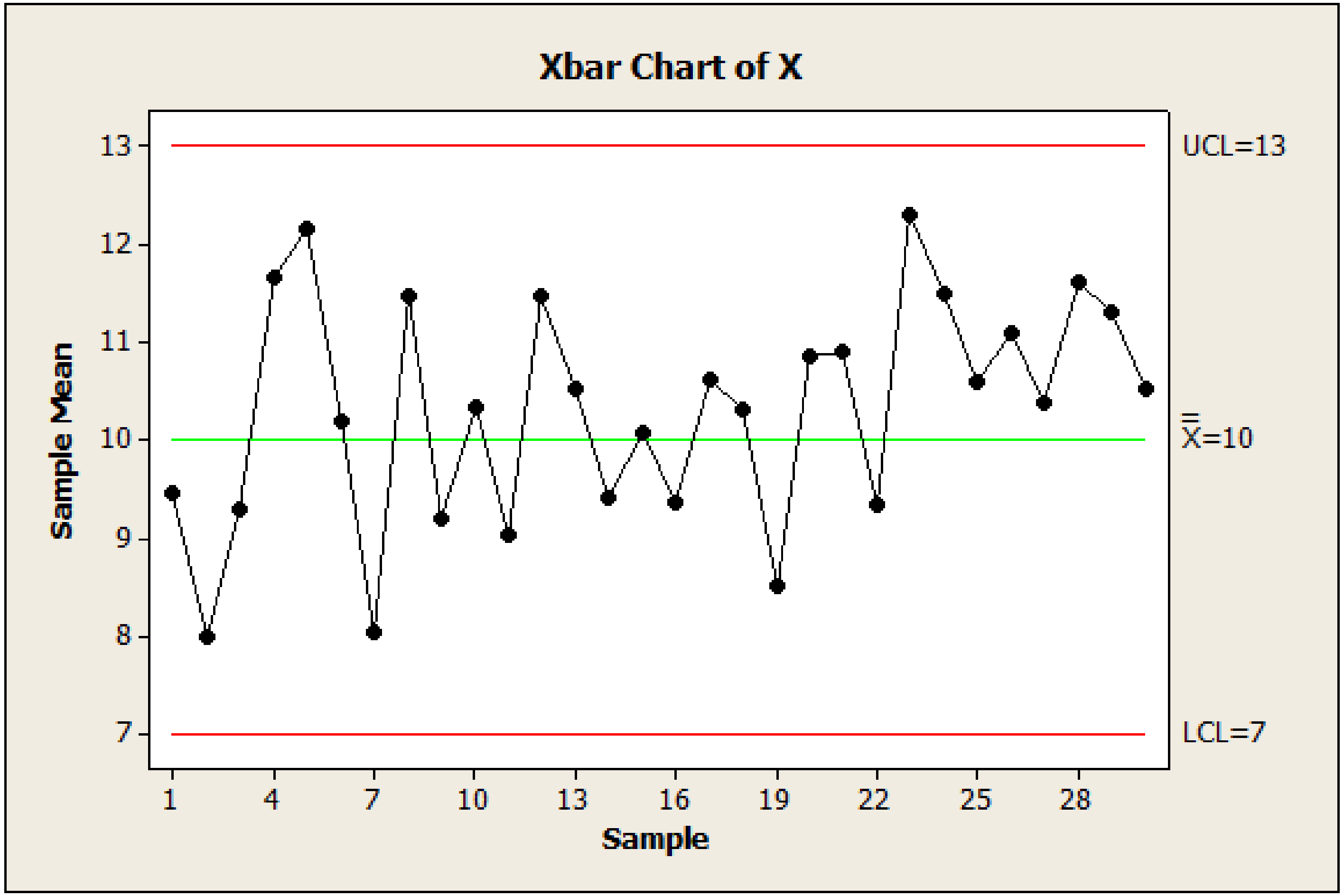
- Onde as 20 primeiras observações foram extraídas aleatoriamente de uma distribuição normal com média μ = 10 e o desvio padrão σ = 1. Essas observações foram plotadas em um gráfico de controle de Shewhart.

LSC = 13

Linha Central = 10

LIC = 7

Gráfico CUSUM



Universidade Federal de Pernambuco

Gráfico CUSUM

- Nesse caso, para o exemplo anterior, temos:

$$C_i = \sum_{j=1}^{i} (X_j - 10)$$

$$= (X_i - 10) + \sum_{j=1}^{i-1} (X_j - 10)$$

$$= (X_i - 10) + C_{i-1}$$

Universidade Federal de Pernambuco

Gráfico CUSUM

- Como podemos observar novamente através da tabela abaixo:

Amostra	X	X-10	C=(X-10)+(C-1)
1	9,45	-0,55	-0,55
2	7,99	-2,01	-2,56
3	9,29	-0,71	-3,27
4	11,66	1,66	-1,61
5	12,16	2,16	0,55
6	10,18	0,18	0,73
7	8,04	-1,96	-1,23
8	11,46	1,46	0,23
9	9,20	-0,80	-0,57
10	10,34	0,34	-0,23
11	9,03	-0,97	-1,20
...	...	...	...

Gráfico CUSUM

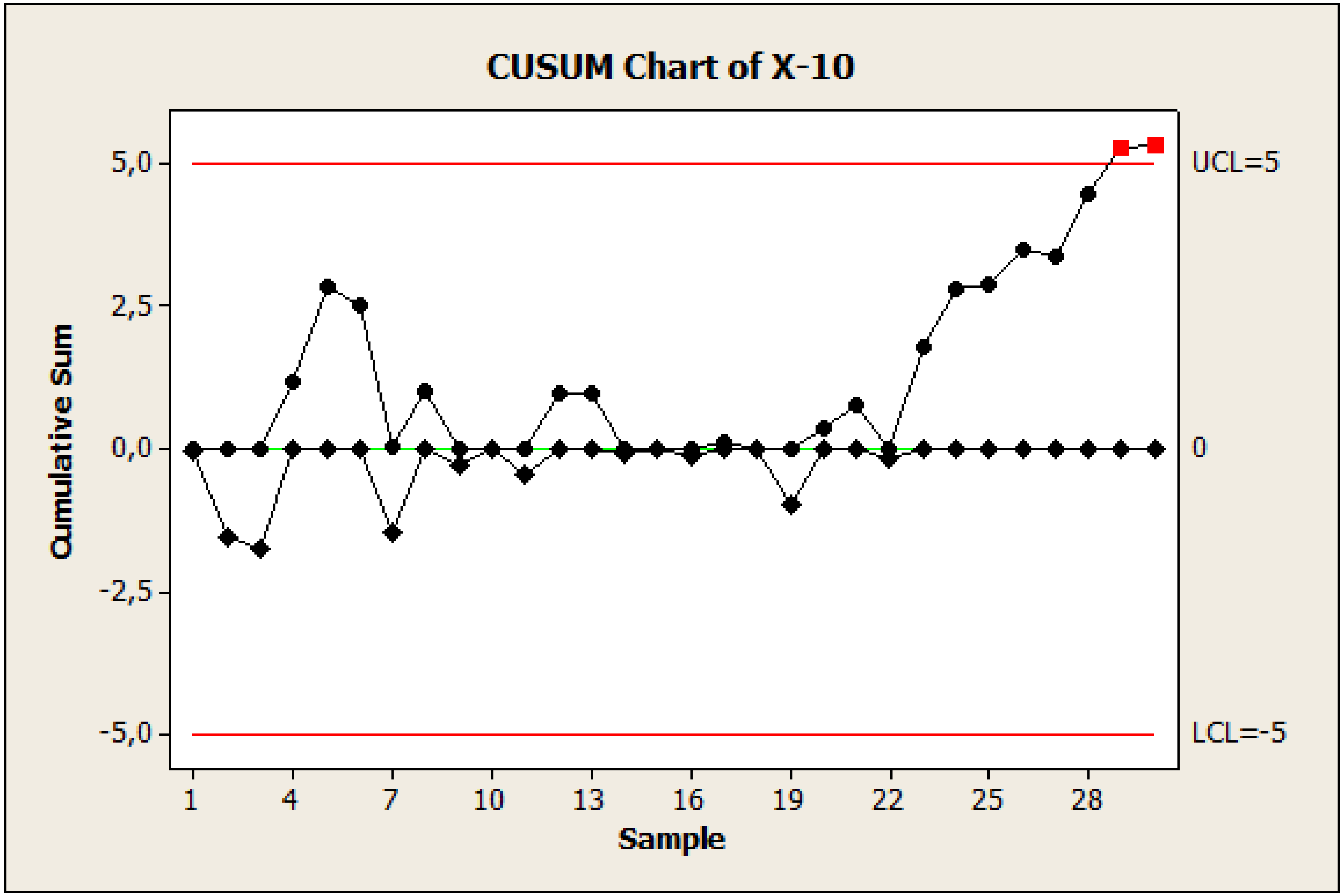


Gráfico CUSUM

- O CUSUM tabular trabalha acumulando desvios $\mu 0$ que estão acima do alvo, com uma estatística C+, e acumulando desvios de $\mu 0$ que estão abaixo do alvo, com outra estatística C-.
- As estatísticas C+ e C- são chamadas cusums unilaterais superior e inferior, respectivamente.

Gráfico CUSUM

- CUSUM tabular

$$C_i^+ = máx[0; xi - (\mu 0 + K) + C_{i-1}^+]$$

$$C_i^- = máx[0; (\mu 0 + K) - xi + C_{i-1}^-]$$

$$K = \frac{\delta}{2}\sigma = \frac{|\mu 1 - \mu 0|}{2}$$

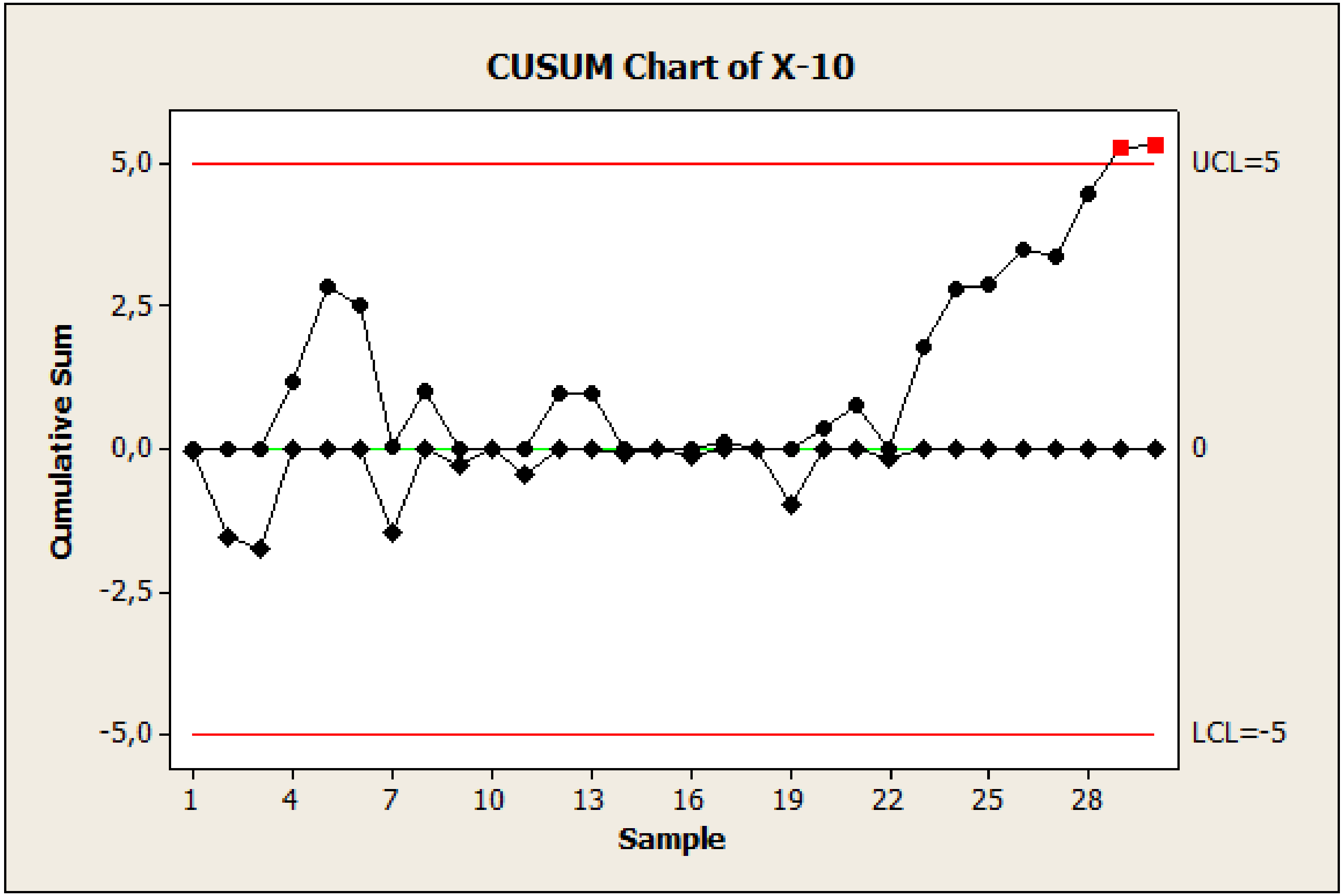
Gráfico CUSUM

Amostra	X	X-10,5	C+	9,5-X	C-
1	9,45	-1,05	0	0,05	0,05
2	7,99	-2,51	0	1,51	1,56
3	9,29	-1,21	0	0,21	1,77
4	11,66	1,16	1,16	-2,16	0
5	12,16	1,66	2,82	-2,66	0
6	10,18	-0,32	2,50	-0,68	0
7	8,04	-2,46	0,04	1,46	1,46
8	11,46	0,96	1,00	-1,96	0
9	9,20	-1,3	0	0,30	0,3
10	10,34	-0,16	0	-0,84	0
11	9,03	-1,47	0	0,47	0,47
...	...	...	...	...	...

Gráfico CUSUM

Amostra	X	X-10,5	C+	9,5-X	C-
...	...	...	...	...	...
20	10,84	0,34	0,34	-1,34	0
21	10,90	0,4	0,74	-1,4	0
22	9,33	-1,17	0	0,17	0,17
23	12,29	1,79	1,79	-2,79	0
24	11,50	1	2,79	-2,00	0
25	10,60	0,1	2,89	-1,10	0
26	11,08	0,58	3,47	-1,58	0
27	10,38	-0,12	3,35	-0,88	0
28	11,62	1,12	4,47	-2,12	0
29	11,31	0,81	5,28	-1,81	0
30	10,52	0,02	5,30	-1,02	0

Gráfico CUSUM



Agenda

Centro de Informática U·F·P·E

- Introdução;
- Gráficos X e R;
- Gráficos X e S;
- Gráfico CUSUM;
- **Gráfico EWMA;**
- Exemplos utilizando a ferramenta Minitab.

Gráfico EWMA

- O gráfico de controle da Média Móvel Exponencial Ponderada (MMEP) – EWMA (*Exponentially Weighted Moving Average*) – é também uma boa alternativa ao gráfico de controle de Shewhart, quando se tem o interesse em detectar pequenas mudanças:
- É definido por:

$$Z_i = \lambda X_i + (1 - \lambda) Z_{i-1}$$

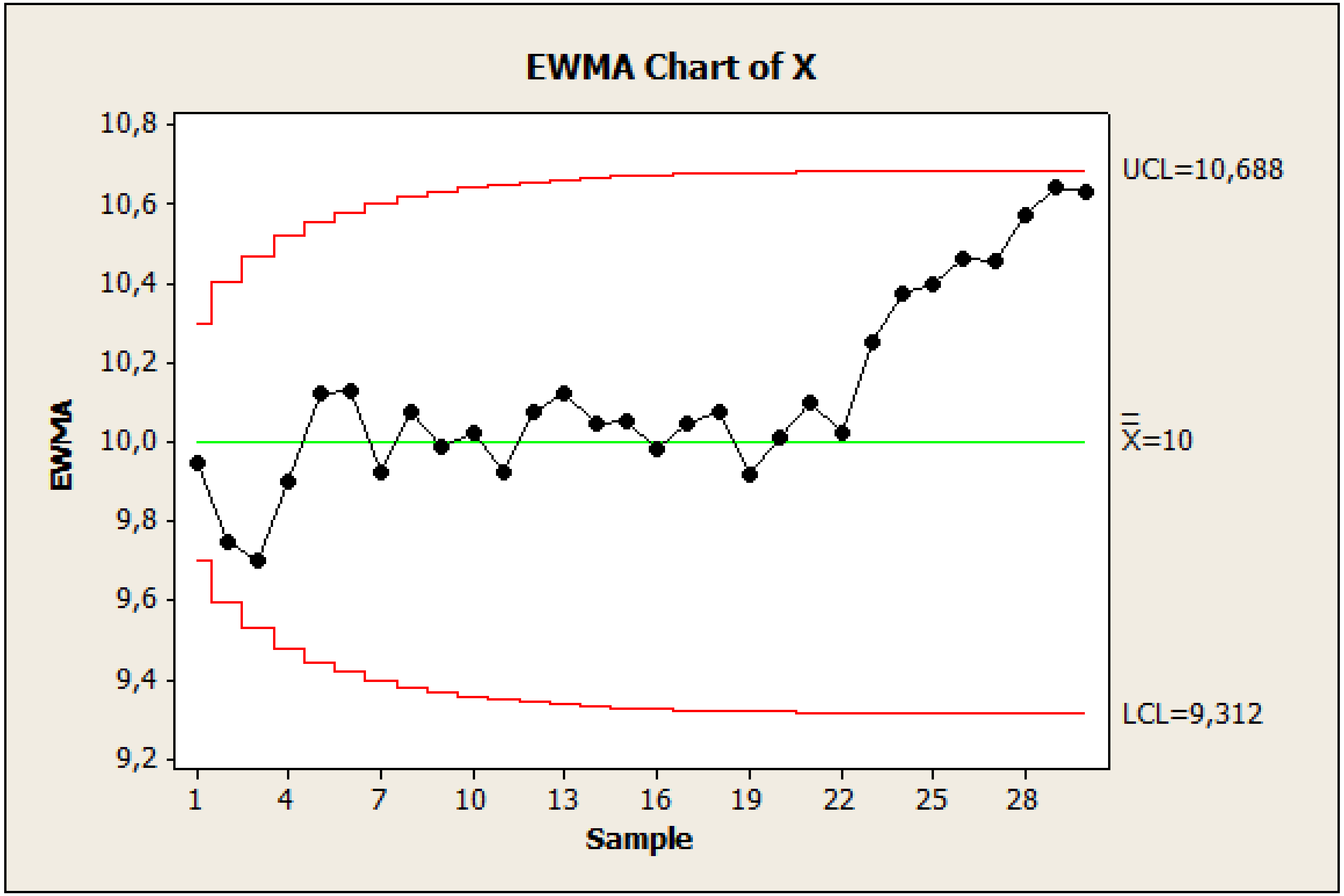
Gráfico EWMA

$$LSC = \mu_0 + L\sigma\sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)}[1-(1-\lambda)^{2i}]}$$

$$LinhaCentral = \mu_0$$

$$LIC = \mu_0 - L\sigma\sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)}[1-(1-\lambda)^{2i}]}$$

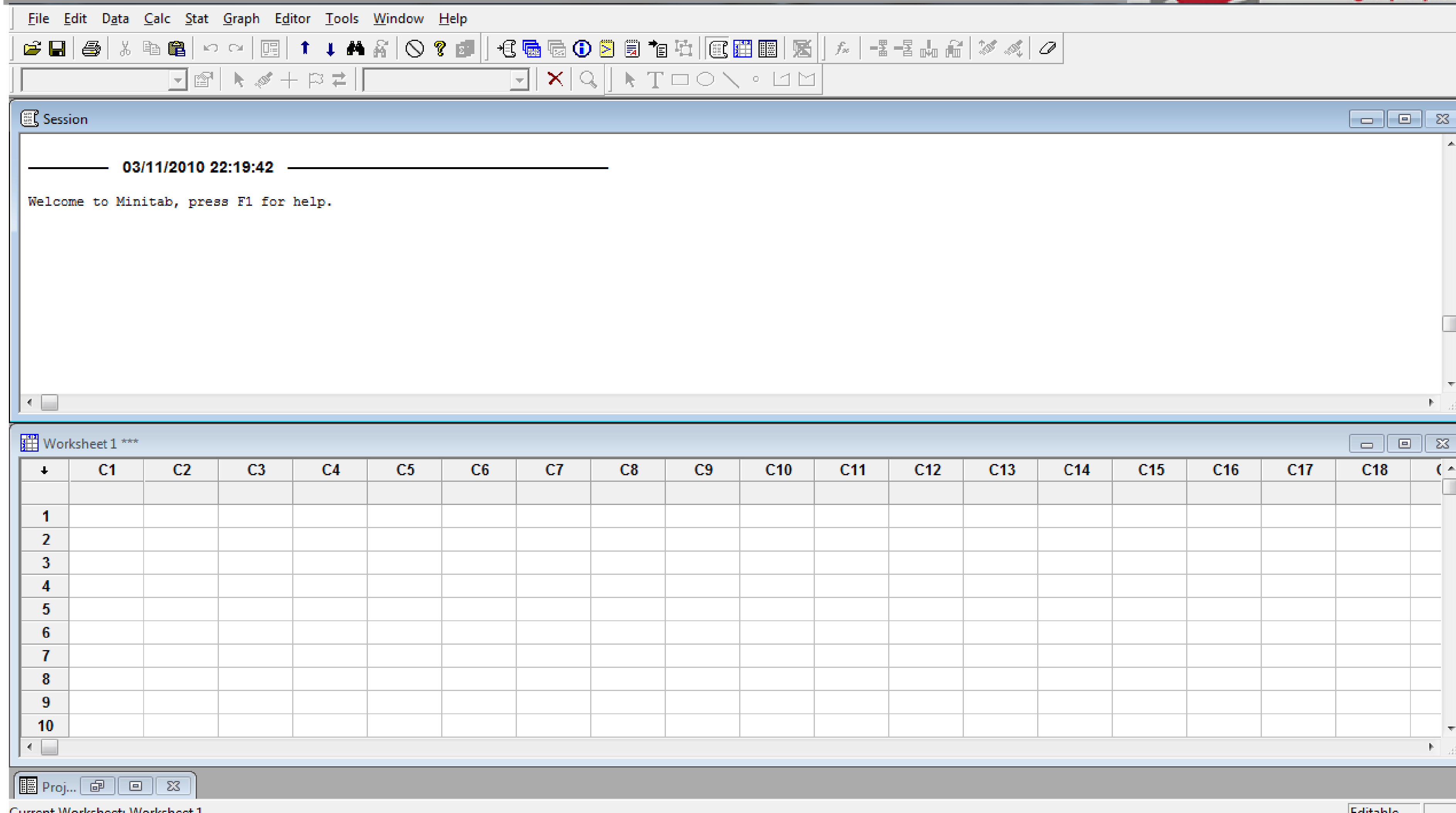
Gráfico EWMA



Agenda

- Introdução;
- Gráficos X e R;
- Gráficos X e S;
- Gráfico CUSUM;
- Gráfico EWMA;
- **Exemplos utilizando a ferramenta Minitab.**

Ferramenta para geração de Gráficos de Controle



Dúvidas

Tabela A.1: Constantes para a Construção de Gráficos de Controle (Extraída de Montgomery, D.C. (1991a)).

Observações na Amostra, n	Gráficos para Médias					Gráficos para Desvio Padrão				Gráficos para Amplitudes							
	Fatores para os limites de controle			Fatores para a linha média		Fatores para os limites de controle.				Fatores para a linha média			Fatores para os limites de controle				
	A	A_2	A_3	c_4	$1/c_4$	B_3	B_4	B_5	B_6	d_2	$1/d_2$	d_3	D_1	D_2	D_3	D_4	
2	2,121	1,880	2,659	0,7979	1,2533	0	3,267	0	2,606	1,128	0,8865	0,853	0	3,686	0	3,267	
3	1,732	1,023	1,954	0,8862	1,1284	0	2,568	0	2,276	1,693	0,5907	0,888	0	4,358	0	2,575	
4	1,500	0,729	1,628	0,9213	1,0854	0	2,266	0	2,088	2,059	0,4857	0,880	0	4,698	0	2,282	
5	1,342	0,577	1,427	0,9400	1,0638	0	2,089	0	1,964	2,326	0,4299	0,864	0	4,918	0	2,115	
6	1,225	0,483	1,287	0,9515	1,0510	0,030	1,970	0,029	1,874	2,534	0,3946	0,848	0	5,078	0	2,004	
7	1,134	0,419	1,182	0,9594	1,0423	0,118	1,882	0,113	1,806	2,704	0,3698	0,833	0,204	5,204	0,076	1,924	
8	1,061	0,373	1,099	0,9650	1,0363	0,185	1,815	0,179	1,751	2,847	0,3512	0,820	0,388	5,306	0,136	1,864	
9	1,000	0,337	1,032	0,9693	1,0317	0,239	1,761	0,232	1,707	2,970	0,3367	0,808	0,547	5,393	0,184	1,816	
10	0,949	0,308	0,975	0,9727	1,0281	0,284	1,716	0,276	1,669	3,078	0,3249	0,797	0,687	5,469	0,223	1,777	
11	0,905	0,285	0,927	0,9754	1,0252	0,321	1,679	0,313	1,637	3,173	0,3152	0,787	0,811	5,535	0,256	1,744	
12	0,866	0,266	0,886	0,9776	1,0229	0,354	1,646	0,346	1,610	3,258	0,3069	0,778	0,922	5,594	0,283	1,717	
13	0,832	0,249	0,850	0,9794	1,0210	0,382	1,618	0,374	1,585	3,336	0,2998	0,770	1,025	5,647	0,307	1,693	
14	0,802	0,235	0,817	0,9810	1,0194	0,406	1,594	0,399	1,563	3,407	0,2935	0,763	1,118	5,696	0,328	1,672	
15	0,775	0,223	0,789	0,9823	1,0180	0,428	1,572	0,421	1,544	3,472	0,2880	0,756	1,203	5,741	0,347	1,653	
16	0,750	0,212	0,763	0,9835	1,0168	0,448	1,552	0,440	1,526	3,532	0,2831	0,750	1,282	5,782	0,363	1,637	
17	0,728	0,203	0,739	0,9845	1,0157	0,466	1,534	0,458	1,511	3,588	0,2787	0,744	1,356	5,820	0,378	1,622	
18	0,707	0,194	0,718	0,9854	1,0148	0,482	1,518	0,475	1,496	3,640	0,2747	0,739	1,424	5,856	0,391	1,608	
19	0,688	0,187	0,698	0,9862	1,0140	0,497	1,503	0,490	1,483	3,689	0,2711	0,734	1,487	5,891	0,403	1,597	
20	0,671	0,180	0,680	0,9869	1,0133	0,510	1,490	0,504	1,470	3,735	0,2677	0,729	1,549	5,921	0,415	1,585	
21	0,655	0,173	0,663	0,9876	1,0126	0,523	1,477	0,516	1,459	3,778	0,2647	0,724	1,605	5,951	0,425	1,575	
22	0,640	0,167	0,647	0,9882	1,0119	0,534	1,466	0,528	1,448	3,819	0,2618	0,720	1,659	5,979	0,434	1,566	
23	0,626	0,162	0,633	0,9887	1,0114	0,545	1,455	0,539	1,438	3,858	0,2592	0,716	1,710	6,006	0,443	1,557	
24	0,612	0,157	0,619	0,9892	1,0109	0,555	1,445	0,549	1,429	3,895	0,2567	0,712	1,759	6,031	0,451	1,548	
25	0,600	0,153	0,606	0,9896	1,0105	0,565	1,435	0,559	1,420	3,931	0,2544	0,708	1,806	6,056	0,459	1,541	

Para $n > 25$

$$A = \frac{3}{\sqrt{n}} \quad A_3 = \frac{3}{c_4\sqrt{n}} \quad c_4 \cong \frac{4(n-1)}{4n-3} \quad B_3 = 1 - \frac{3}{c_4\sqrt{2(n-1)}} \quad B_4 = 1 + \frac{3}{c_4\sqrt{2(n-1)}} \quad B_5 = c_4 - \frac{3}{\sqrt{2(n-1)}} \quad B_6 = c_4 + \frac{3}{\sqrt{2(n-1)}}$$