Tópicos Avançados em Avaliação
e Desempenho de Sistemas

ANOVA *(Analysis of Variance)*

Aleciano Júnior
aflj@cin.ufpe.br
Carlos Melo
casm3@cin.ufpe.br
Charles Bezerra
cbm3@cin.ufpe.br

Tópicos

- **Introdução**
  - História, Utilidade e Aplicações
- **Revisão, Fundamentação e Conceitos Básicos**
  - Variável aleatória, Variância e Desvio padrão
- **Teste de Hipóteses**
  - Dados com distribuição normal
    - Dois grupos
      - Teste-T
    - Mais de dois grupos
      - ANOVA One-Way
      - Post-Hoc Tests (Tukey)
      - ANOVA Two-Way

Introdução

Introdução

- "**ANalysis Of VAriance**" - Análise de Variância

- Técnica que estuda grupos de médias de um determinado fator(es) e verifica se existe diferença significante entre elas.

- Semelhante* a outras técnicas como *Teste T*, Fatorial e bem acoplado com Regressão e Análise de Sensibilidade.

Histórico

- O método ANOVA foi criado por R.A. Fisher e parceiros nos anos 20 na Inglaterra.
- Seus principais estudos foram sobre biologia evolucionária, genética e estatística.
- O teste-F do ANOVA foi nomeado em homenagem a Fisher.

Utilidade e Aplicações

- **Suponha que uma empresa de pintura está avaliando o seu método para verificar se existem diferenças entre diferentes ângulos de aplicação do material com relação a força de adesão.**

Ângulo	Observações			
	1	2	3	4
0º	4	5,5	5	4
30º	5	4,7	4	5
45º	3,7	4,5	4	4,5
60º	4,7	4	4	4,5

Utilidade e Aplicações

- Visualmente não é fácil observar se existem diferenças.

- O ANOVA entra e permite dizer através do Teste de Hipóteses se existe ao menos uma opção estatisticamente diferente.

- Diferente do Teste T, é utilizada quando existem dois ou mais grupos sendo estudados.

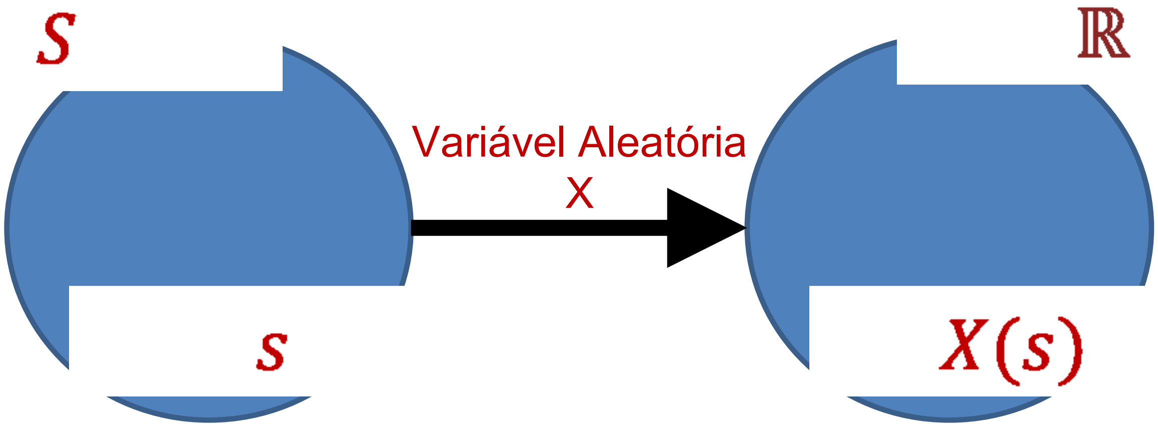
- Como outras técnicas, permite melhorar processos existentes e avaliar novos que estão em fase de desenvolvimento.

Revisão, Fundamentação e Conceitos Básicos

Variável Aleatória

- **É uma função que associa elementos de um espaço amostral a valores numéricos;**

$$X\colon \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$



Variância

- Termo introduzido por Fischer em 1918;

- Trata-se de uma medida de dispersão estatística;
  - Com ela é possível determinar o quanto um valor observado se diferencia do valor esperado (Média).

Exemplos

- **Observe as notas de três competidores em uma prova de manobras radicais com skates:**

	Nota do Jurado D	Nota do Jurado E	Nota do Jurado F
Competidor Aleciano	7	5	3
Competidor Carlos	5	4	6
Competidor Charles	4	4	7

- **Ao se calcular a média das notas entre os três competidores o valor obtido será cinco. O que podemos fazer para determinarmos um vencedor?**

Exemplos

- 1 - Os competidores poderiam entrar novamente na pista e refazer suas manobras a fim de obter uma nova pontuação (Mas os resultados poderiam ser os mesmos);
- 2 - As notas dos jurados poderiam ter pesos distintos com o calculo de uma média ponderada (De certo seria injusto);
- 3 - Remover as maiores e as menores notas ainda resultariam em empates;
- 4, …,10 outras alternativas;
- Que tal calcular a variância?

Exemplos

- Se $\mu = E(X)$ é a média da variável aleatória X, então a variância é dada por:

$$var(X) = E((X - \mu)^2)$$

$$V_{Aleciano} = \frac{(7-5)^2 + (5-5)^2 + (3-5)^2}{3} = \frac{4+0+4}{3} = 2,667$$

$$V_{Carlos} = \frac{(5-5)^2 + (4-5)^2 + (6-5)^2}{3} = \frac{0+1+1}{3} = 0,667$$

$$V_{Charles} = \frac{(4-5)^2 + (4-5)^2 + (7-5)^2}{3} = \frac{1+1+4}{3} = 2$$

Desvio Padrão

- Introduzido em 1894 por Karl Person;
- É uma medida de dispersão;
- É calculado através da raiz quadrada da variância;
  - Objetiva obter valores não-negativos;
  - Quanto mais próximo do valor esperado, menos dispersos estão os dados da amostra ou população que se deseja averiguar;

Exemplos

- O desvio padrão de uma variável aleatória X é definido pela raiz quadrada da variância:

$$\sigma = \sqrt{\Sigma\left((X - \Sigma(X))^2\right)} = \sqrt{\Sigma(X^2) - (\Sigma(X))^2}$$

$$Aleciano = \sqrt{2,667} = 1,633$$

$$Carlos = \sqrt{0,667} = 0,817$$

$$Charles = \sqrt{2} = 1,414$$

Teste de Hipóteses

Teste de Hipóteses

- Realizar suposições sobre os dados coletados e ao final aceitá-las, ou rejeitá-las.

- **Mas o que seria uma hipótese?**

Teoria que pode explicar um determinado comportamento de interesse.

- **Podemos formar hipóteses?**

Teste T, ANOVA, Fatorial e outros já tem hipóteses "pré-definidas".

Teste de Hipóteses

- **Hipóteses levam à definição de variáveis:**
  - **Independentes: entrada do processo de experimentação. Quando controladas chamamos de fatores.**
  - **Dependentes: saída do processo de experimentação. São efeito das combinações de variáveis e seus fatores. Seus possíveis valores são chamados de resultados.**

Teste de Hipóteses

- Ainda sobre fatores:

  – Um experimento pode ter vários fatores envolvidos: temperatura, material, pressão...

  – Cada fator tem seus sub-tipos, que são as variações ou possibilidades possíveis para tal. Isto são os tratamentos.

  – Cada combinação é um experimento individual, que devido ao tipo de teste, precisam de um mínimo de observações ou replicações.

Teste de Hipóteses

Teste de Hipóteses

- **Voltando ao exemplo dos competidores: suponha que o atleta Carlos Melo é patrocinado pela Nike e a empresa quer avaliar o desempenho do atleta com dois tênis diferentes:**

Experimento Nike		**Observações**				
		1	*2*	*3*	*4*	*5*
Tipos	***Runner***	45	47	43	46	48
	Runner *Pro*	50	45	47	43	46

(minutos)

Teste de Hipóteses

- **Voltando ao exemplo dos competidores: suponha que o atleta Carlos Melo é patrocinado pela Nike e a empresa quer avaliar o desempenho do atleta com dois tênis diferentes:**

Experimento Nike		**Observações**				
		1	*2*	*3*	*4*	*5*
Tipos	***Runner***	45	47	43	46	48
	Runner *Pro*	50	45	47	43	46

(minutos)

Fator

Tratamentos

Resultados

Dados com distribuição normal

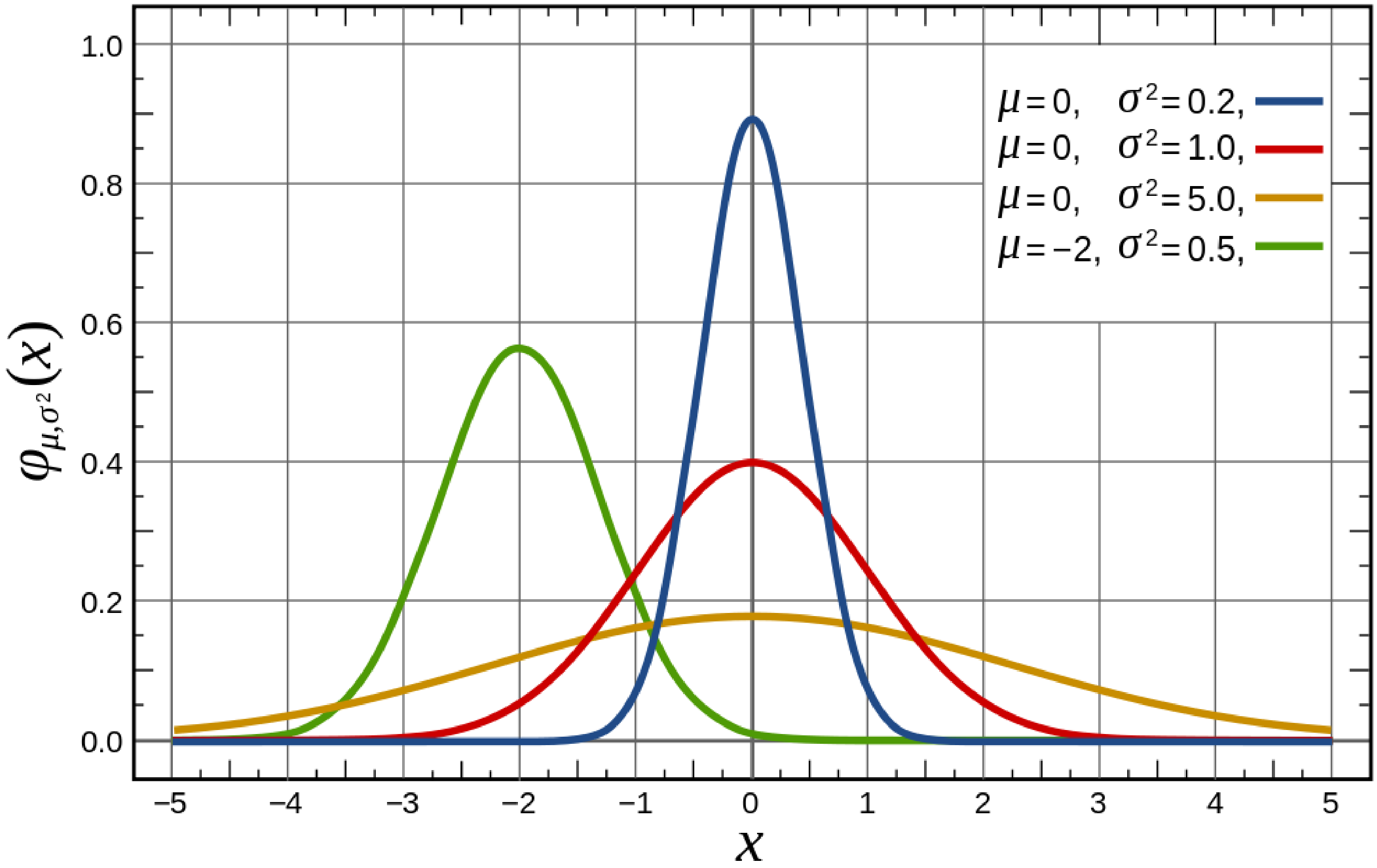
- **Para o teste T e ANOVA os dados precisam de seguir uma distribuição normal.**

- **Pode até não seguir, mas o número de medidas precisa ser acima de 30.**

- **Isto vale para os seus tratamentos, dois no caso do teste T, e três ou mais como é utilizado no ANOVA.**

- **As medidas também precisam ser independentes umas das outras.**

Dados com distribuição normal



Dois Grupos (Teste-T)

- É utilizado para
  - Comparar uma amostra com uma população;
  - Comparar duas amostras pareadas;
    - Mesmo sujeito em momentos distintos.
  - Comparar duas amostras independentes.

- Geralmente ao se selecionar uma amostra aleatória, existe uma grande discrepância entre a média dessa amostra e a média da população;
  - Erro Padrão de Média ou Erro Amostral

Dois Grupos (Teste-T)

- É um teste de hipótese que visa testar a existência de diferenças entre a média de uma amostra aleatória e a média populacional;

- Os graus de liberdade determinam tanto a forma da distribuição quanto a dispersão geral;

Exemplo

- Você é um técnico de basquete. Você "ouviu dizer" que a cafeína pode melhorar a atenção e, consequentemente, o rendimento esportivo. Então, você decidiu testar se a cafeína poderia melhorar o rendimento nos lances livres dos seus atletas adultos.

Exemplo

- Você dividiu seu grupo de 10 atletas, aleatoriamente, em 2 grupos de 5. Meia hora antes do treino, você deu uma pílula de cafeína para o grupo X e uma pílula com farinha (placebo) para o grupo Y.

- Então, você verificou qual dos dois grupos acertou mais lances livres em 20 tentativas.

Walkthrough

- **Passo 1 - Teste de Hipótese**

$$H_0\colon \mu(X) = \mu(Y)$$
$$H_A\colon \mu(X) \neq \mu(Y)$$

- **Passo 2 - Nível de Significância**

$$\alpha\colon 0,05$$

Teste bilateral

Exemplo

- **Passo 3 - Calcular o valor de T.**

Jogador	X	x-bar	(x-xbar)² [Variância]
x1	17		
x2	12		
x3	10		
x4	10		
x5	9		
Soma	**58**	0	**SSx**
Média	**11.6**		

Exemplo

- **Passo 3 - Calcular o valor de T.**

Jogador	X	x-bar	(x-xbar)²
x1	17	5.4	29.16
x2	12	0.4	0.16
x3	10	-1.6	2.56
x4	10	-1.6	2.56
x5	9	-2.6	6.76
Soma	**58**	0	**41.2**
Média	**11.6**		

Exemplo

- **Passo 3 - Calcular o valor de T.**

Jogador	Y	y-bar	(y-ybar)²
y1	10		
y2	8		
y3	4		
y4	2		
y5	1		
Soma	**25**	0	**SSy**
Média	**5**		

Exemplo

- **Passo 3 - Calcular o valor de T.**

Jogador	Y	y-bar	(y-ybar)²
y1	10	5	25
y2	8	3	9
y3	4	-1	1
y4	2	-3	9
y5	1	-4	16
Soma	**25**	0	**60**
Média	**5**		

Exemplo

- **Passo 3 - Calcular o valor de T.**

$$s_{\overline{X}-\overline{Y}} = \sqrt{\frac{SS_X + SS_Y}{n(n-1)}}$$

$$s_{\overline{X}-\overline{Y}} = \sqrt{\frac{41,2 + 60}{5(5-1)}}$$

$$s_{\overline{X}-\overline{Y}} = 2,249$$

Exemplo

- **Passo 3 - Calcular o valor de T.**

Hípotese nula, ambos são iguais

$$t = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_{\bar{X}} - \mu_{\bar{Y}})}{s_{\bar{X}-\bar{Y}}}$$

$$t = \frac{(11,6 - 5) - (0)}{2,249}$$

$$t = 2,934$$

Walkthrough

- **Passo 3 - Calcular o valor T**

$$t = 2,934$$

- **Passo 4 - Encontrar o T crítico**

- **Graus de liberdade**

$$df = (n - 1) + (n - 1)$$

$$df = (5 - 1) + (5 - 1)$$

- **Tabela t**

$$T\ critico = 2,306$$

Exemplo

- **Tabela T.**

gl/P	0,90	0,80	0,70	0,60	0,50	0,40	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
01	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619
02	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598
03	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,541	12,924
04	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
05	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,869
06	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
07	0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,365	3,499	5,408
08	0,130	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889	[illegible]	[illegible]	[illegible]	2,306	2,896	3,355	5,041
09	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	0,129	0,260	0,396	0,540	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437

Walkthrough

- **Passo 5 - Tomada de decisão**

$$Valor\ T(2,934) \geq T - Critico(2,306)$$

H_0 é rejeitada.

- **Passo 6 - Conclusão**

Para esta amostra a cafeína produziu efeitos positivos para aqueles que a consumiram, a média de acertos foi de X = 11,6 contra Y = 5 do grupo que não a consumiu.

ANOVA

- Então vimos que o teste T pode ser utilizado para comparar dois tratamentos de um único fator. Mas e quando precisamos comparar mais de dois tratamentos?
  - Demasiado número de testes
  - Aumentam as chances de um erro tipo I

- Que erro é esse?

ANOVA

- **Erro tipo I:**
  - **Consiste em rejeitar uma hipótese nula quando ela é verdadeira.**
  - **Ocorre o acúmulo de erros alfa quando múltiplos testes pareados são realizados.**

Grupos	Comparações	alfa por comparação	alfa total
2	1	0,05	0,05
3	3	0,05	0,14
4	6	0,05	0,19
5	10	0,05	0,23
6	15	0,05	0,29

$$a_{fw} = 1 - (1 - a_{pc})^{j}$$

ANOVA

- **Então vimos que o teste T pode ser utilizado para comparar dois tratamentos de um único fator. Mas e quando precisamos comparar mais de dois tratamentos?**
  - Demasiado número de testes
  - Aumentam as chances de um erro tipo I

- **ANOVA permite comparar mais de dois tratamentos de um fator sem usar o Teste T e identificar se (ao menos) um deles é significativamente diferente dos outros.**

ANOVA

- Se o nível de significância é α, então a probabilidade de um erro do tipo I é α independente do número de médias sendo comparadas. 

ANOVA One-Way

- *One-way* ou de um único fator é o tipo mais simples da ANOVA.

- Uma variável de entrada com dois ou mais valores ou classificações:
  - Quantitativa ou Qualitativa

- Exs.:
  - Diferentes valores de pressão para avaliar a eficiência de um processo fabril
  - Dois ou mais tipos de tênis de uma marca como no exemplo dado anteriormente.

ANOVA One-Way

- **Ao conduzir uma ANOVA desejamos saber o quanto da variabilidade dos resultados obtidos é devido ao tratamento e quanto é devido ao erro.**

ANOVA One-Way

- Suponha que temos a tratamentos que queremos comparar.

- Para cada tratamento teremos n replicações ou observações.

- Teremos N resposta ou medidas que são variáveis aleatórias e podem ser representadas pelo modelo linear estatístico:

ANOVA One-Way

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \epsilon_{ij} \begin{cases} i = 1, 2, \ldots, a \\ j = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

- **μ é a média global;**

- **t_i é o efeito do tratamento, um valor que é um desvio da média geral;**

- **E_{ij} é o erro da medida naquela replicação;**

ANOVA One-Way

- **Também pode ser escrito como:**

$$Y_{ij} = \mu_i + \epsilon_{ij} \begin{cases} i = 1, 2, \ldots, a \\ j = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

μ_i é a média do tratamento onde ela é igual a $\mu + T_i$

ANOVA One-Way

- **Tabela de dados para o One-way**

Tratamento	Observações				Totais	Médias
1	y_{11}	y_{12}	$\cdots$	y_{1n}	y_{1}	$\bar{y}_{1}$
2	y_{21}	y_{22}	$\cdots$	y_{2n}	y_{2}	$\bar{y}_{2}$
:	:	:	:::	:	:	:
a	y_{a1}	y_{a2}	$\cdots$	y_{an}	y_{a}	$\bar{y}_{a}$
					$y_{..}$	$\bar{y}_{..}$

ANOVA One-Way

- **No ANOVA também temos o teste de hipóteses.**

- **No ANOVA *one-way* são duas hipóteses:**

H_0 = todas as médias são iguais

$$\mu_A = \mu_B = \mu_C = \mu_D$$

H_1 ou H-alternativa = ao menos uma das médias é diferente das demais

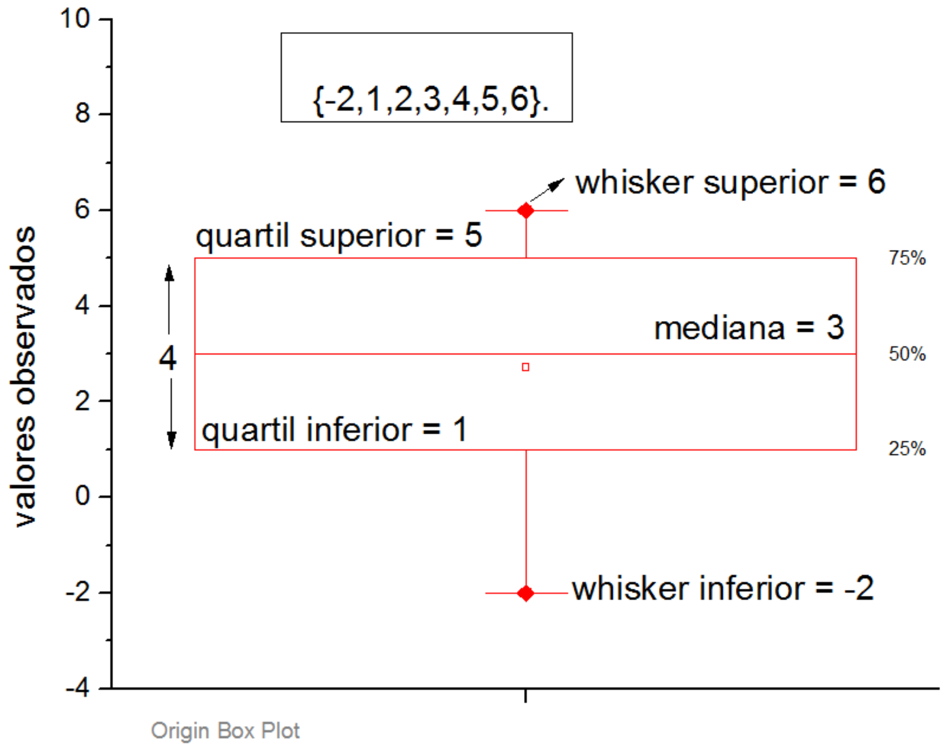
Diagrama de Caixa (Boxplot)

- O diagrama de caixa é uma ferramenta para localizar e analisar a variação de uma variável dentre diferentes grupos de dados.

- Na construção do diagrama de caixa, utilizamos alguns percentis (mediana, primeiro e terceiro quartis), que são pouco influenciados por *outliers*.

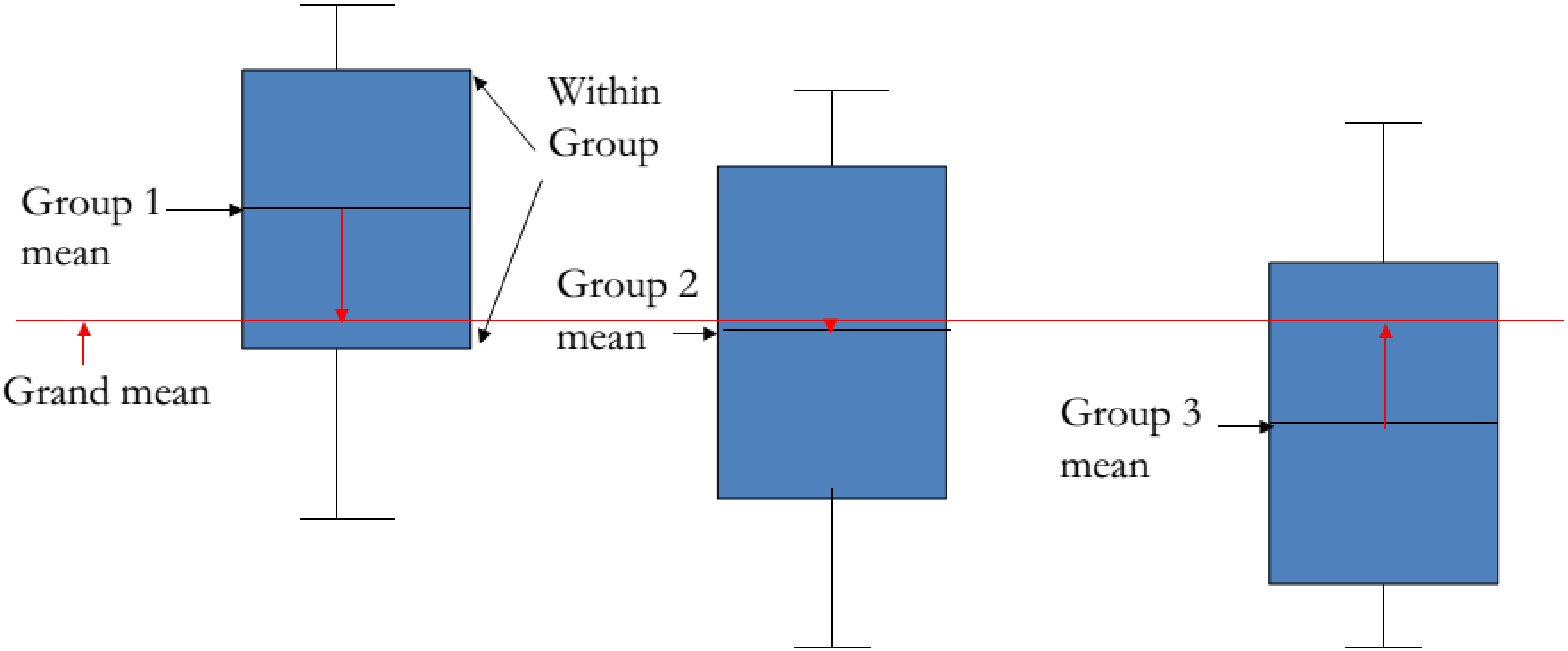
Exemplo

- **Amostra {-2,1,2,3,4,5,6}**



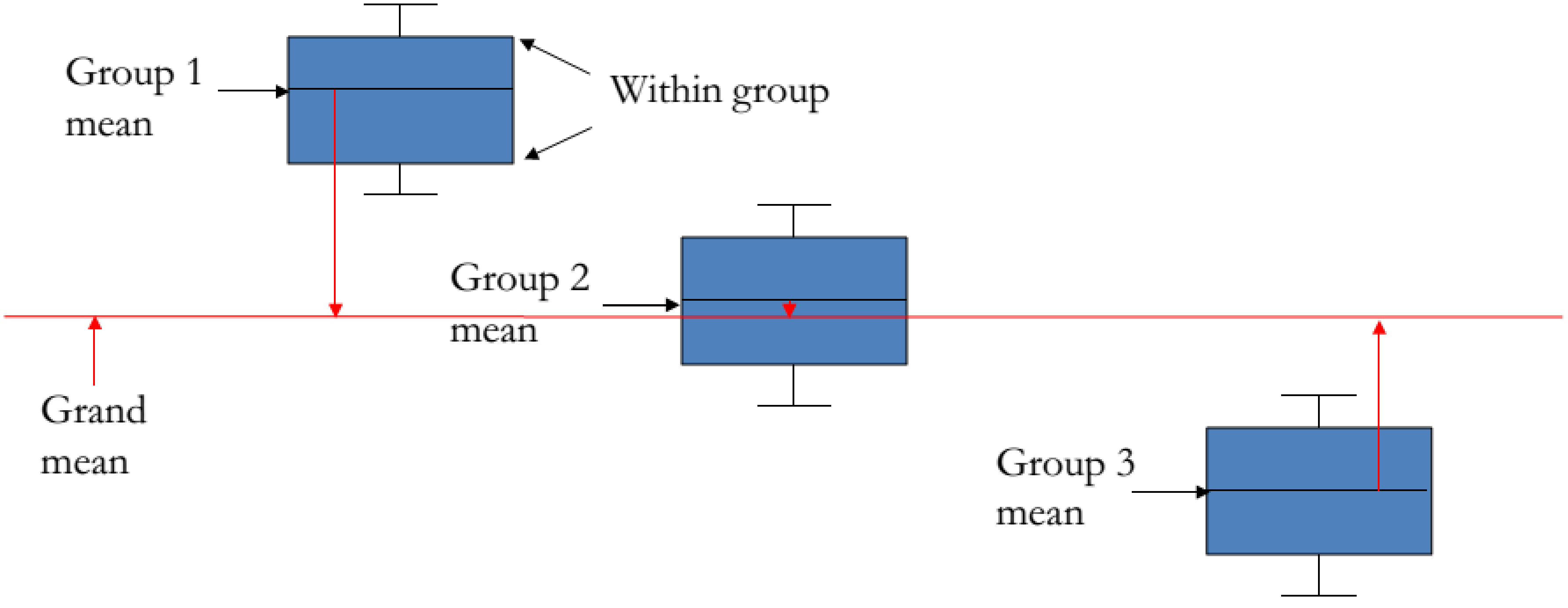
ANOVA One-Way

- **Diferença de variabilidade:**
  - **- Pequena entre grupos c/ relação a dentro deles.**



ANOVA One-Way

- **Diferença de variabilidade:**
  - **- Grande entre grupos c/ relação a dentro deles.**



ANOVA One-Way

- **Para medir essa variabilidade, o ANOVA usa a seguinte equação:**

$$SS_T = SS_{\text{Treatments}} + SS_E$$

- **A soma dos quadrados totais (SST) é o nosso PRIMEIRO passo para obter o ANOVA.**

$$SS_T = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{n} y_{ij}^2 - \frac{y_{..}^2}{N}$$

ANOVA One-Way

- **O segundo passo é obter a soma dos quadrados entre grupos (tratamentos) ou a soma dos quadrados devido ao erro.**

- **Geralmente se calcula o primeiro deles, eis o nosso SEGUNDO passo.**

$$SS_{\text{Treatments}} = \sum_{i=1}^{a} \frac{y_{i\cdot}^2}{n} - \frac{y_{\cdot\cdot}^2}{N}$$

ANOVA One-Way

- **O SSE pode ser obtido pela diferença entre o SST e o SSTreatments. Nosso TERCEIRO passo:**

$$SS_E = SS_T - SS_{\text{Treatments}}$$

ANOVA One-Way

- O **QUARTO** passo calcula os graus de liberdade de todos estes componentes:
  - Se temos n observações e a tratamentos, então o grau de liberdade total será $\underline{an - 1}$
  - Se temos a grupos, então o grau de liberdade entre grupos será $\underline{a - 1}$
  - Se temos N o número de medidas totais e a tratamentos, o grau de liberdade do erro é $\underline{N - a}$

ANOVA One-Way

- A soma dos graus de liberdade dentro dos grupos e devido ao erro é igual ao total:

$$an - 1 = a - 1 + a(n - 1)$$

Total **Grupos** **Erro**

ANOVA One-Way

- O **QUINTO** passo é calcular o quadrado médio entre tratamentos:

$$MS_{\text{Treatments}} = SS_{\text{Treatments}}/(a - 1)$$

- O **SEXTO** passo é calcular o quadrado médio devido ao erro:

$$MS_E = SS_E/[a(n - 1)]$$

ANOVA One-Way

- No **SÉTIMO** passo, tomamos o resultado destes últimos dois cálculos para determinar o valor **F**, também chamado de **F observado**.

$$F_0 = \frac{SS_{\text{Treatments}}/(a-1)}{SS_E/[a(n-1)]} = \frac{MS_{\text{Treatments}}}{MS_E}$$

- No **OITAVO** passo iremos consultar a tabela F para obter o **F crítico** com relação aos graus de liberdade da fórmula anterior e adotando um nível significância α.

ANOVA One-Way

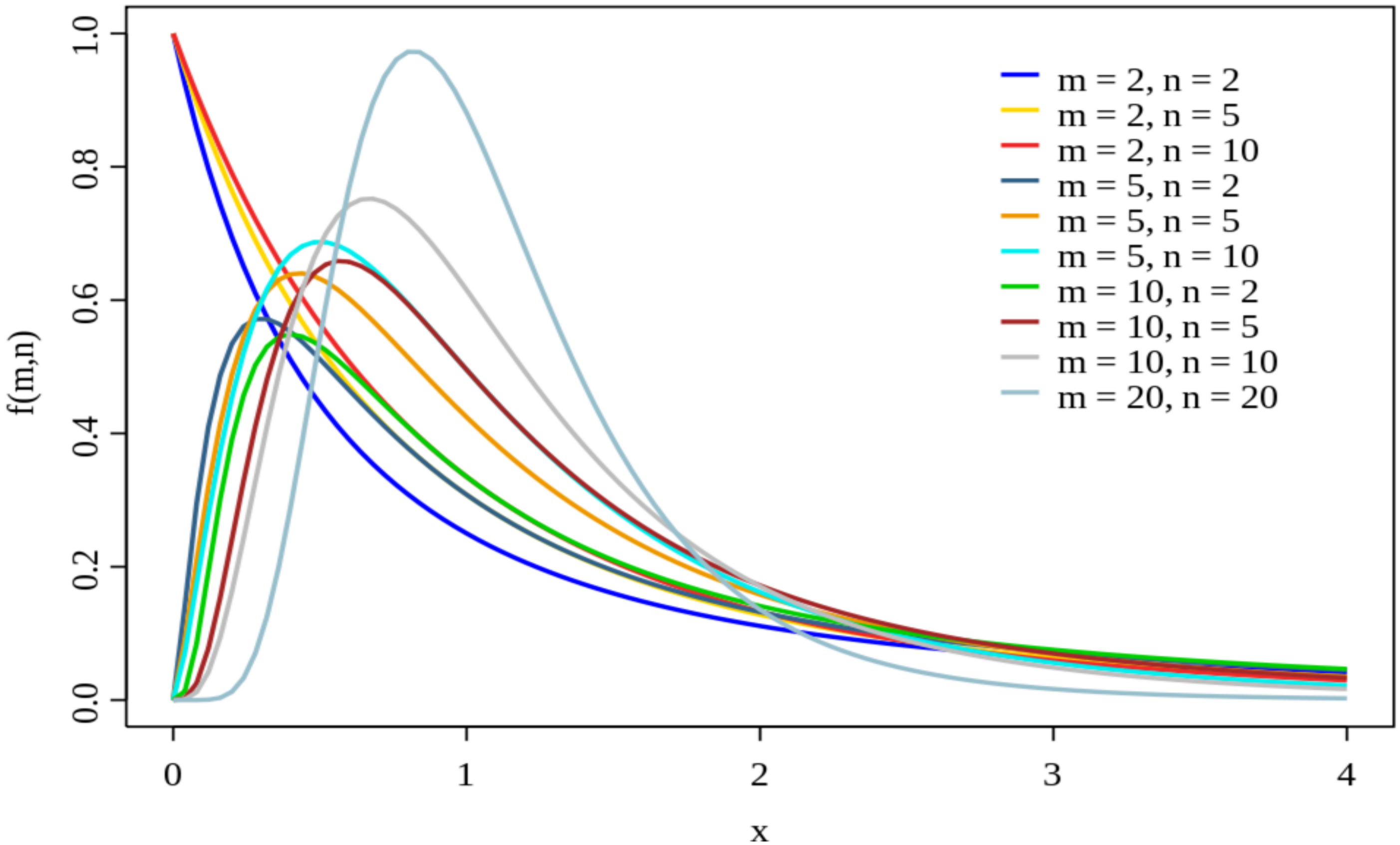
- Geralmente adota-se $\alpha = 0{,}05$ Este valor é a probabilidade de cometer o erro do tipo I mencionado anteriormente.

- Se o F observado for maior que o F crítico, então podemos rejeitar a hipótese H_0. Ou seja, pelo menos uma das médias são estatisticamente diferente das outras.

- Senão, consideramos a H_0, significando que não há efeito significativo em utilizar um tratamento ou outro. Medidas fazem parte da mesma dist. normal.

ANOVA One-Way

- **Distribuição F**



ANOVA One-Way

- **Exemplo:**

Uma equipe está testando a capacidade de três rádios *Wifi*. Eles instalaram os três rádios e realizaram testes de conexão com cinco replicações para cada rádio. O objetivo é entender como cada um se comporta no ambiente. Aqui estão as medições em termos de vazão:

Rádio	Observações				
	1	2	3	4	5
D-Link	33	40	33,5	35	33
Linksys	39	39,5	40	34	35,5
Opticom	40,5	42	46,7	45,5	50

ANOVA One-Way

- **Resultados: H_0 rejeitada!**

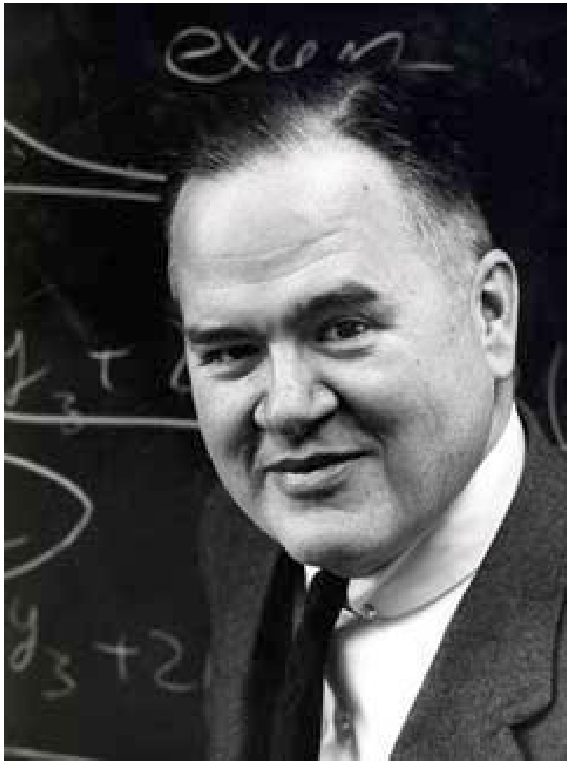
Anova: fator único						
RESUMO						
Grupo	*Contagem*	*Soma*	*Média*	*Variância*		
D-Link	5	174,5	34,9	8,8		
Linksys	5	188	37,6	7,175		
Opticom	5	224,7	44,94	14,343		
ANOVA						
Fonte da variação	*SQ*	*gl*	*MQ*	*F*	*valor-P*	*F crítico*
Entre grupos	269,945	2	134,973	13,3557	0,00089	3,88529
Dentro dos grupos	121,272	12	10,106			
Total	391,217	14				

Post-Hoc Tests

- **Os testes de comparação de média servem como um complemento para o estudo da análise de variância.**

- **Há vários testes de comparação de médias, entre os quais podemos citar: teste de Tukey, teste de Duncan, teste de Fisher, teste de Scheffé, teste de Dunnet e teste de Bonferroni.**

Post-Hoc Tests (Tukey)



- O Teste proposto por Tukey (1953), é um dos testes de comparação de média mais utilizados, por ser bastante rigoroso e fácil aplicação;
- Não permite comparar grupos de tratamentos entre si;
- É utilizado para testar toda e qualquer diferença entre duas médias de tratamento;

Post-Hoc Tests (Tukey)

- A estratégia de Tukey consiste em definir a menor diferença significativa.
- O procedimento para a comparação de pares de Tukey utiliza o intervalo studentizado.

Maior média da amostra

Menor média da amostra

$$Q = \frac{\boxed{\overline{Y}_{\max}} - \boxed{\overline{Y}_{\min}}}{\sqrt{MS_E/n}}$$

Post-Hoc Tests (Tukey)

Número de tratamentos

$$T_\alpha = g_\alpha(\boxed{a}, \boxed{f})\sqrt{\frac{MS_E}{n}}$$

Número do grau de liberdade

Post-Hoc Tests (Tukey)

- **Tabela com os dados mostrado no exemplo anterior e os dados obtidos depois do teste da ANOVA.**

Radio	Observações							
	1	2	3	4	5	Soma	Média	Variância
D-Link	33	40	33,5	35	33	174,5	34,9	8,8
Linksys	39	39,5	40	34	35,5	188	37,6	7,175
Opticom	40,5	42	46,7	45,5	50	224,7	44,94	14,343

ANOVA						
Fonte da variação	SQ	GL	MQ	F	valor-P	F crítico
Entre grupos	269,9453	2	134,9727	13,3557	0,000887	3,885294
Dentro dos grupos	121,272	12	10,106			
Total	391,2173	14				

Post-Hoc Tests (Tukey)

- **PREIMEIRO PASSO:** É preciso calcular a diferença mínima significativa - dms. É preciso encontrar o valor representado em pelo menos uma das diferenças para garantir que os parâmetros são diferentes.

$$dms = q.\sqrt{\frac{QMR}{n}}$$

Post-Hoc Tests (Tukey)

- **PRIMEIRO PASSO: É preciso calcular a diferença mínima significativa - dms. É preciso encontrar o valor representado em pelo menos uma das diferenças para garantir que os parâmetros são diferentes.**

Valor tabelado (5%)

Quadrado médio do resíduo

$$\boxed{dms} = \boxed{q.}\sqrt{\frac{\boxed{QMR}}{\boxed{n}}}$$

Diferença mínima significativa

Número de repetições

Post-Hoc Tests (Tukey)

- **SEGUNDO PASSO: Encontrar o valor de "q".**

q(5%); k; GLR

Post-Hoc Tests (Tukey)

- **SEGUNDO PASSO: Encontrar o valor de “q”.**

q(5%); k; GLR

Tabela q de 5%

Número de colunas

Grau de liberdade do resíduo

Na tabela inicial temos n° de colunas k = 5

Na tabela ANOVA obtemos o resíduo GLR = 12

Teste de Tukey - Tabela 5% de significancia

GL(residual)	Numero de grupos no tratamento								
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5	3,64	4,6	5,22	5,67	6,03	6,33	6,58	6,8	6,99
6	3,46	4,34	4,9	5,3	5,63	5,9	6,12	6,32	6,49
7	3,34	4,16	4,68	5,06	5,36	5,61	5,82	6	6,16
8	3,26	4,04	4,53	4,89	5,17	5,4	5,6	5,77	5,92
9	3,2	3,95	4,41	4,76	5,02	5,24	5,43	5,59	5,74
10	3,15	3,88	4,33	4,65	4,91	5,12	5,3	5,46	5,6
11	3,11	3,82	4,26	4,57	4,82	5,03	5,2	5,35	5,49
12	3,08	3,77	4,2	4,51	4,75	4,95	5,12	5,27	5,39
13	3,06	3,73	4,15	4,45	4,69	4,88	5,05	5,19	5,32
14	3,03	3,7	4,11	4,41	4,64	4,83	4,99	5,13	5,25

Teste de Tukey - Tabela 5% de significancia

GL(residual)	Numero de grupos no tratamento								
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5	3,64	4,6	5,22	5,67	6,03	6,33	6,58	6,8	6,99
6	3,46	4,34	4,9	5,3	5,63	5,9	6,12	6,32	6,49
7	3,34	4,16	4,68	5,06	5,36	5,61	5,82	6	6,16
8	3,26	4,04	4,53	4,89	5,17	5,4	5,6	5,77	5,92
9	3,2	3,95	4,41	4,76	5,02	5,24	5,43	5,59	5,74
10	3,15	3,88	4,33	4,65	4,91	5,12	5,3	5,46	5,6
11	3,11	3,82	4,26	4,57	4,82	5,03	5,2	5,35	5,49
12	3,08	3,77	4,2	4,51	4,75	4,95	5,12	5,27	5,39
13	3,06	3,73	4,15	4,45	4,69	4,88	5,05	5,19	5,32
14	3,03	3,7	4,11	4,41	4,64	4,83	4,99	5,13	5,25

Post-Hoc Tests (Tukey)

$$dms = q.\sqrt{\frac{QMR}{n}}$$

$$dms = 4{,}51.\sqrt{\frac{10{,}106}{5}} =$$

Post-Hoc Tests (Tukey)

$$dms = q.\sqrt{\frac{QMR}{n}}$$

$$dms = 4{,}51.\sqrt{\frac{10{,}106}{5}} = 6{,}41$$

Post-Hoc Tests (Tukey)

TERCEIRO PASSO: **Fazer as comparações**

$$\left|\overline{X}_A - \overline{X}_B\right| \geq dms \Rightarrow \mu_A \neq \mu_B$$

$$\left|\overline{X}_A - \overline{X}_B\right| < dms \Rightarrow \mu_A = \mu_B$$

Post-Hoc Tests (Tukey)

TERCEIRO PASSO: Fazer as comparações

$$\left|\overline{X}_A - \overline{X}_B\right| \geq dms \Rightarrow \mu_A \neq \mu_B$$

$$\left|\overline{X}_A - \overline{X}_B\right| < dms \Rightarrow \mu_A = \mu_B$$

COMPARAÇÕES	$\left\|\overline{X}_A - \overline{X}_B\right\|$	dms	CONCLUSÃO
D-Link e Linksys	2,7	6,41	μD-Link = μLinksys
D-Link e Opticom	10,04	6,41	μD-Link ≠ μOpticom
Linksys e Opticom	7,34	6,41	μLinksys ≠ μOpticom

ANOVA Two-Way

- Agora vamos ter dois fatores que irão variar conjuntamente para serem testados em todas as possibilidades.

- Tratamento do Fator A X Tratamento do FatorB

e assim sucessivamente até serem completadas todas as combinações

- Já se trata de um experimento fatorial!

ANOVA Two-Way

- **Os princípios são o mesmo do One-way ANOVA. Mas, devido ao aumento de fatores, teremos algumas novidades:**
  - **Maior interesse em determinar os efeitos provados pelos fatores: *main effects***
  - **Também estabelecer se a interação entre os fatores produz mudanças significativas**
- **Ao final do ANOVA two-way saberemos o quanto cada um irá impactar nos resultados.**

ANOVA Two-Way

- **Interação:** caso1

Factor A	Factor B: B_{low}	Factor B: B_{high}
A_{low}	10	20
A_{high}	30	40

Factor A	Factor B: B_{low}	Factor B: B_{high}
A_{low}	10	20
A_{high}	30	0

Efeito médio de A: diferença entre a resposta média de A_{high} e A_{low}.

Efeito médio de B: diferença entre a resposta média de B_{high} e B_{low}.

ANOVA Two-Way

- Notamos no primeiro caso a resposta entre os níveis é a mesma.
- Quando isto não ocorre (caso 2) então há uma interação entre os fatores.
- Apesar de A ou B isolados não terem efeito no caso 2, o importante é verificar que existe uma interação que alterará significativamente a resposta.
- Assim, determinar esta interação é mais importante ou válido que os efeitos dos fatores isoladamente.

ANOVA Two-Way

- **Tabela de dados:**

		Factor B					
		1	2	$\cdots$	b	Totals	Averages
Factor A	1	$y_{111}, y_{112}, \ldots, y_{11n}$	$y_{121}, y_{122}, \ldots, y_{12n}$		$y_{1b1}, y_{1b2}, \ldots, y_{1bn}$	$y_{1\cdot\cdot}$	$\bar{y}_{1\cdot\cdot}$
	2	$y_{211}, y_{212}, \ldots, y_{21n}$	$y_{221}, y_{222}, \ldots, y_{22n}$		$y_{2b1}, y_{2b2}, \ldots, y_{2bn}$	$y_{2\cdot\cdot}$	$\bar{y}_{2\cdot\cdot}$
	$\vdots$						
	a	$y_{a11}, y_{a12}, \ldots, y_{a1n}$	$y_{a21}, y_{a22}, \ldots, y_{a2n}$		$y_{ab1}, y_{ab2}, \ldots, y_{abn}$	$y_{a\cdot\cdot}$	$\bar{y}_{a\cdot\cdot}$
Totals		$y_{\cdot 1\cdot}$	$y_{\cdot 2\cdot}$		$y_{\cdot b\cdot}$	$y_{\cdots}$	
Averages		$\bar{y}_{\cdot 1\cdot}$	$\bar{y}_{\cdot 2\cdot}$		$\bar{y}_{\cdot b\cdot}$		$\bar{y}_{\cdots}$

ANOVA Two-Way

- **As observações seguem o modelo do one-way com a adição do segundo fator e da interação.**

$$Y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \epsilon_{ijk} \begin{cases} i = 1, 2, \ldots, a \\ j = 1, 2, \ldots, b \\ k = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

ANOVA Two-Way

- **Agora temos três grupos de hipóteses diferentes para serem testadas:**

1. **H_0 : todas as médias do efeito A são iguais.**
   H_1 : ao menos uma das médias A produz diferença.

1. **H_0 : todas as médias do efeito B são iguais.**
   H_1 : ao menos uma das médias B produz diferença.

1. **H_0 : todas as médias das interações (AxB) são iguais.**
   H_1 : ao menos uma das médias das interações produz diferença.

ANOVA Two-Way

- **A soma dos quadrados obdece a seguinte fórmula:**

$$SS_T = SS_A + SS_B + SS_{AB} + SS_E$$

$$SS_T = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{n} y_{ijk}^2 - \frac{y_{\dots}^2}{abn}$$

$$SS_A = \sum_{i=1}^{a} \frac{y_{i\cdot\cdot}^2}{bn} - \frac{y_{\dots}^2}{abn}$$

$$SS_B = \sum_{j=1}^{b} \frac{y_{\cdot j\cdot}^2}{an} - \frac{y_{\dots}^2}{abn}$$

$$SS_{AB} = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \frac{y_{ij\cdot}^2}{n} - \frac{y_{\dots}^2}{abn} - SS_A - SS_B$$

ANOVA Two-Way

- Os graus de liberdade são:
- Efeito A: (a - 1)
- Efeito B: (b - 1)
- Interação: (a - 1) * (b - 1)
- Erro: a*b*(n - 1)

ANOVA Two-Way

- **Os quadrados médios são as somas dos quadrados de cada um dos componentes sobre os seus respectivos graus de liberdade, assim:**

$$MS_A = \frac{SS_A}{a - 1} \qquad MS_B = \frac{SS_B}{b - 1} \qquad MS_{AB} = \frac{SS_{AB}}{(a - 1)(b - 1)}$$

$$MS_E = \frac{SS_E}{ab(n - 1)}$$

- **Em seguida iremos obter os F's de cada um dos componentes para avaliar sua participação nas respostas.**

ANOVA Two-Way

- **F's observados:**

$$F_0 = \frac{MS_A}{MS_E} \qquad F_0 = \frac{MS_B}{MS_E} \qquad F_0 = \frac{MS_{AB}}{MS_E}$$

- **Consultando a tabela F podemos obter os valores críticos para cada um, considerando um determinado grau de significância α e assim determinando a importância de cada um dos componentes na resposta.**

ANOVA Two-Way

- **Exemplo no Excel:**

Vamos avaliar notas de alunos de uma escola entre meninos e meninas de 10, 11 e 12 anos. Vamos observar com o ANOVA two-way as diferenças entre eles.

	10 anos	11 anos	12 anos
Meninos	4	6	8
	6	6	9
	8	9	13
Meninas	4	7	12
	8	10	14
	9	13	16

Referências

http://www.brasilescola.com/matematica/medidas-dispersao-variancia-desvio-padrao.htm
http://en.wikipedia.org/wiki/F-test
http://en.wikipedia.org/wiki/P-value

Applied Statistics and Probability for Engineers, Third Edition, Douglas C. Montgomery, George C. Runger, John Wiley & Sons, Inc.

Art of Computer Systems Perfomance Analysis Techniques for Experimental Design Measurements Simulation and Modeling by Raj Jain, Wiley Computer Publishing, John Wiley & Sons, Inc.

Referências

Simulation modeling hanbook: a practical approach, Christopher A. Chung, CRC Press.