Geração de *Random Variates*

Edson Samuel Jr - esgsj@cin.ufpe.br
Eduardo Bezerra - ebb@cin.ufpe.br
Pedro Augusto - pacm@cin.ufpe.br

Agenda

- Introdução à Simulação
- Tipos de Simulação
- Simulação de Eventos Discretos
- Geração de *Random Variates*
  - Definição
  - Técnicas
  - Procedimentos

Introdução à Simulação

"Simulação é um processo pelo qual um modelo de um sistema é avaliado numericamente, e os dados deste processo são utilizados para estimar diversas medidas de interesse"

CASSANDRAS & LAFORTUNE (2008)

Introdução à Simulação

O processo de análise e modelagem de simulação é conduzido com o intuito de:

- Adquirir conhecimento sobre como um sistema opera
- Conceber políticas para a melhoria do desempenho
- Testar novos conceitos e/ou sistemas antes da implementação
- Obter informações sem perturbar o funcionamento de um sistema

Introdução à Simulação

Vantagens adicionais

- Controle sobre a duração (tempo) dos experimentos
- Redução das exigências sobre o conhecimento analítico
- Maior facilidade para a demonstração de modelos

Introdução à Simulação

Desvantagens

- "*Garbage in*, *garbage out*"
- A simulação não fornece soluções fáceis para problemas complexos
- O uso exclusivo de simulação não possibilita resolver o problema por completo

Tipos de Simulação

- Emulação
- Simulação de Monte Carlo
- Simulação Orientada a Rastros
- Simulação de Eventos Discretos

Emulação

A emulação simula um hardware ou um firmware correspondente

Procura resolver problemas referentes a projetos de hardware

Exemplos

- Emulação de um terminal
- Emulação de um processador

Simulação de Monte Carlo

- Simulação estática
- Utilizada para modelar fenômenos probabilísticos que não têm suas características modificadas com o tempo
- Representa o uso de experimentos com números pseudo-aleatórios para efetuar a avaliação de expressões matemáticas

Simulação de Monte Carlo

- A avaliação de uma integral definida é um bom exemplo do uso da Simulação de Monte Carlo
- Ex.: $I = \int_0^2 e^{-x^2}\,dx$

$$x \sim \text{Uniform}(0,2)$$

$$\text{Density function } f(x) = \tfrac{1}{2} \quad \text{iff} \quad 0 \le x \le 2$$

$$y = 2e^{-x^2}$$

$$\begin{aligned} E(y) &= \int_0^2 2e^{-x^2} f(x)\,dx \\ &= \int_0^2 2e^{-x^2}\tfrac{1}{2}\,dx \\ &= \int_0^2 e^{-x^2}\,dx \\ &= I \end{aligned}$$

$$x_i \sim \text{Uniform}(0,2)$$

$$y_i = 2e^{-x_i^2}$$

$$I = E(y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

Simulação Orientada a Rastros

- O termo rastro (*trace*) é associado a um registro, ordenado por tempo, de eventos em um sistema real
- Neste tipo de simulação, o *trace* é tratado como um dado de entrada para o procedimento
- Exemplos para aplicações deste tipo de simulação: análise de *cache*, algoritmos de paginação, escalonamento de CPU, prevenção de *deadlock* e alocação dinâmica

Simulação Orientada a Rastros

Vantagens

- Credibilidade dos resultados
- Validação simplificada
- Exatidão nos valores da carga de trabalho
- Alto nível de detalhe
- Menor incidência de aleatoriedade
- Comparação justa entre os dados de entrada
- Fidelidade com a implementação real

Simulação Orientada a Rastros

Desvantagens

- Complexidade de representação do sistema
- Representatividade única das cargas de trabalho
- Coleta excessiva de dados em pouco tempo
- Alto nível de detalhe
- Dificuldade para modificar os registros coletados

Simulação de Eventos Discretos

Aplicável no contexto de sistemas de eventos discretos

- "Um Sistema de Eventos Discretos é um sistema em que a evolução de seus estados depende inteiramente da ocorrência de eventos discretos de forma assíncrona sobre o tempo."
  CASSANDRAS & LAFORTUNE (2008)
- Eventos discretos implicam em aleatoriedade

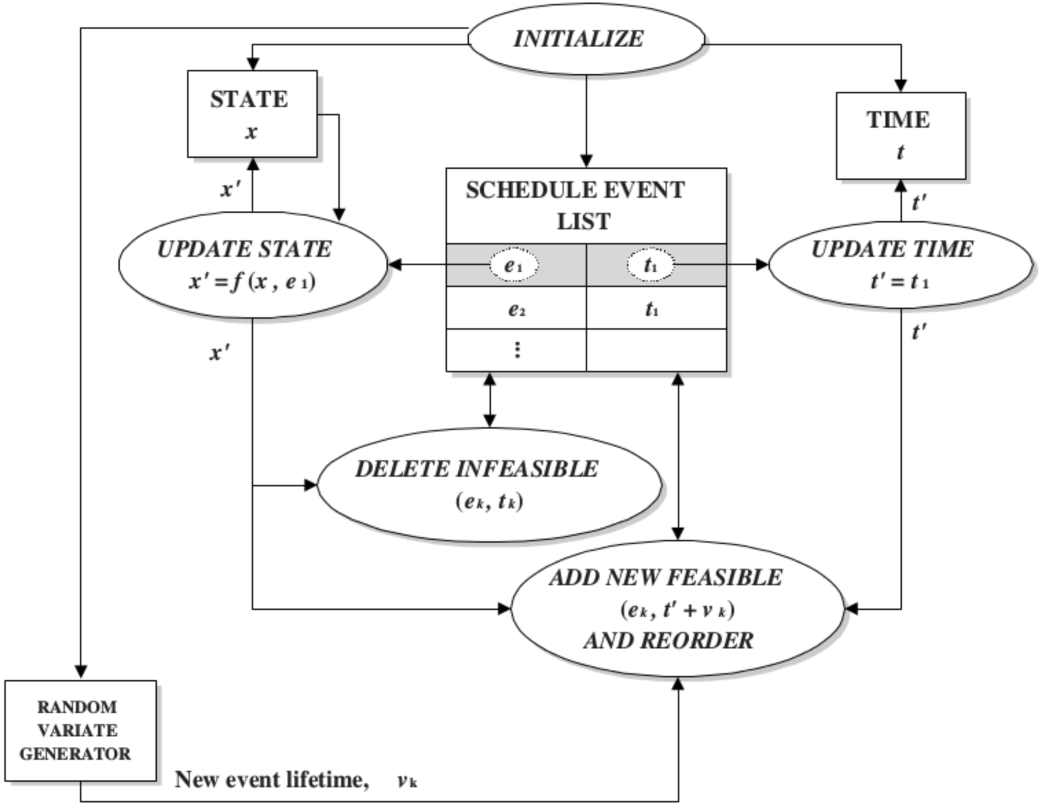
Componentes de um Simulador

- Estados
- Tempo
- Lista de Eventos Agendados
- Registradores de Dados
- Rotina de Inicialização
- Rotina de Atualização do Tempo
- Rotina de Atualização do Estado
- Rotina de Geração de *Random Variates*
- Rotina de Geração de Relatórios
- Programa Principal

Procedimentos para a Simulação

1. Remover o primeiro registro (e_1, t_1) da lista de eventos agendados.
2. Atualizar o tempo de simulação, avançando-o para o novo tempo t_1
3. Modificar o estado, de acordo com a função de transição
4. Remover da lista de eventos agendados quaisquer registros de eventos inviáveis ao novo estado
5. Incluir na lista qualquer evento viável que não está agendado
6. Reordenar a lista de eventos agendados atualizada

Simulação de Eventos Discretos



Geração de Números Aleatórios

- Essencial para a constução de Sistemas Estocásticos de Eventos Discretos.
  - Tempos de serviços.
  - Tempos entre chegadas.
  - etc.
- Utilizados juntamente com distribuições de probabilidade para a criação de *Random Variates*

Geração de Números Aleatórios

- *Random variates* de qualquer distribuição podem ser obtidas pela transformação de uma distribuição uniforme sobre o intervalo [0,1].

Geração de Números Aleatórios

- Toda geração de um “número aleatório” obedece algum algoritmo e, portanto, não possui verdadeira aleatoriedade.
- *“A qualidade de de um gerador de número aleatório utilizado em um simulador nunca deveria ser subestimada.”*

Geração de Números Aleatórios

- A Técnica Linear Congruente

$$X_{k+1} = (aX_k + c) \bmod m, \qquad k = 0, 1, \ldots$$

$$0 \leq X_k \leq m - 1 \qquad \text{for all } k = 1, 2, \ldots$$

Geração de Números Aleatórios

- Otimizações…
    - Computadores utilizam numeros de 32 bits.
        - $m = 2^n$ poupa operação de módulo.
    - c e m primos entre si maximizam o período.

Geração de Números Aleatórios

- Exercício.

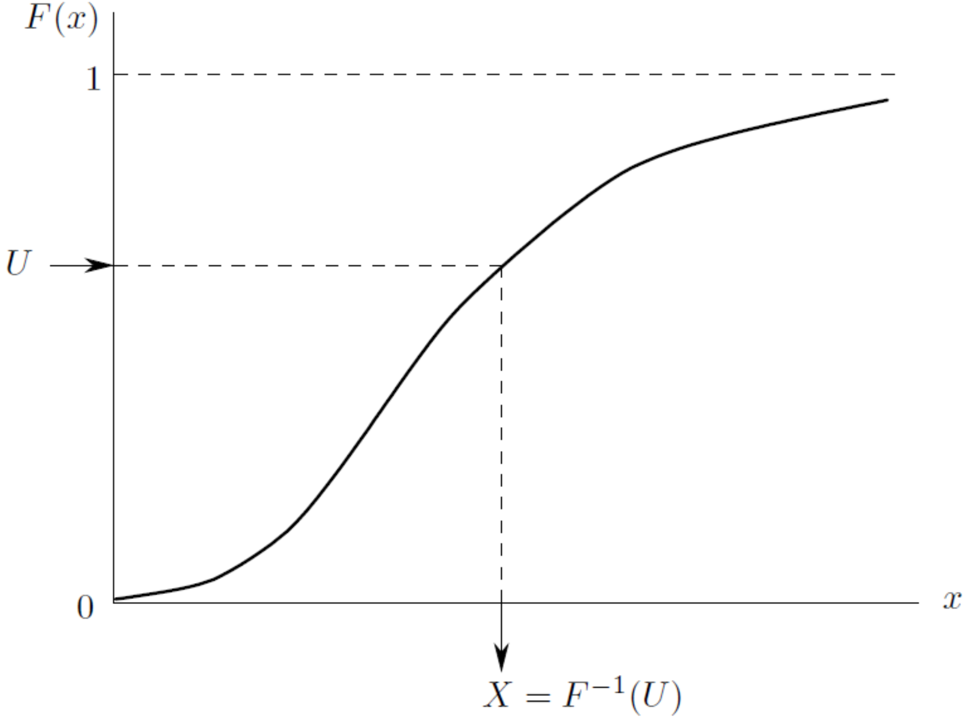
Geração de *Random Variates*

- *Random Variates* são obtidas a partir de uma distribuição uniforme [0,1] transformada por uma distribuição de probabilidade especificada.
- Números aleatórios que obedecem uma distribuição probabilística.

Técnica da Transformada Inversa

- *X random variate* gerada a partir de *cumulative distribuction function* (*cdf*) $F(x)$.
- $F(x)$ contínua.
- U número aleatório provido por U[0,1].
- $U \Rightarrow F(x) \in [0,1]$

Técnica da Transformada Inversa



Técnica da Transformada Inversa

$$P[X \leq x] = P[F^{-1}(U) \leq x] = P[U \leq F(x)]$$

$$P[U \leq F(x)] = F(x)$$

$$P[X \leq x] = F(x)$$

Técnica da Transformada Inversa

- Exemplo:

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$U = 1 - e^{-\lambda X}$$

$$X = \frac{-1}{\lambda} \ln(1 - U)$$

$$X = (-1/\lambda) \ln(U).$$

Técnica da Convolução

- Esta técnica explora o fato que uma variavel aleatória *X* pode comumente ser definida como a soma de *n* outras variaveis aleatórias.

$$X = Y_1 + \ldots + Y_n$$

Técnica da Convolução

1. Gere *n random variates*: $Y_1, \dots, Y_n$, a partir de $G(x)$.
2. Atribua $X = Y_1 + \dots + Y_n$.

Técnica da Convolução

- Exercício.

Técnica da Composição

- Esta técnica explora o fato que a *cdf* $F(x)$ de uma variável aleatória X, algumas vezes, pode ser expressada como uma combinação de n *cdf*s.

$$F(x) = p_1 F_1(x) + \ldots + p_n F_n(x)$$

Técnica da Composição

- Onde $p_1 + \ldots + p_n = 1$, $p_i >= 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

$$F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i F_i(x) \quad \text{with} \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1, \quad p_i \geq 0 \text{ for all } i = 1, \ldots, n$$

Técnica da Composição

- Exercício.

Referências

- JAIN, Raj. **The Art of Computer Systems Performance Analysis: Techniques for Experimental Design, Measurement, Simulation, and Modeling**. Wiley-Interscience, New York, NY. 1991.
- CASSANDRAS, Christos G.; LAFORTUNE, Stéphane. **Introduction to Discrete Event Systems, Second Edition**. Springer Science+Business Media, New York, NY. 2008.
- CHUNG, Christopher A. **Simulation Modeling Handbook: A Practical Approach**. CRC Press LLC, Boca Raton, FL. 2004.

Obrigado!