Métodos de Análise Transiente

Tópicos Avançados de Avaliação de Desempenho

Prof. Paulo Maciel / Prof. Ricardo Massa

Apresentação de:

Ana Carolina Veloso

Renata Pedrosa Dantas

Introdução

- **Visão real das cadeias de Markov**
  - Modelo matemático
    - Processo aleatório
      - Discreto
      - Contínuo
  - Ausência de memória
  - Distribuição exponencial (CTMC)

Introdução

Definição Formal

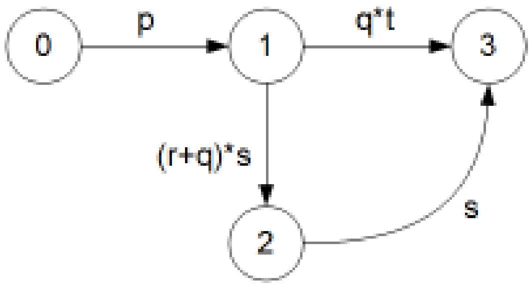
- A probabilidade de qualquer comportamento futuro do processo, quando o seu estado atual é conhecida, não é alterada pela conhecimento adicional sobre seu comportamento passado.
- Propriedade da cadeia de markov é dada da seguinte forma

$$\Pr(X_{n+1} = x | X_1 = x_1, X_2 = x_2 \ldots, X_n = x_n) = \boxed{\Pr(X_{n+1} = x | X_n = x_n).}$$

- Vamos trabalhar apenas com o conjunto de índice discreto, assim notamos que a cadeia e markov é um processo de estados
- Definimos a probabilidade de transição de n-passos como:

$$\boxed{p_{ij} = \Pr(X_{n+1} = j \mid X_n = i).}$$

Introdução



Geração da matriz de taxas

Matriz Q

-1	p	0	0
0	-1	(r+q)*s	q*t
0	0	-1	s
0	0	0	-1

Estado	Prob(X, t=2s)
0	0.1
1	0.2
2	0.6
3	0.1

$$\underline{P}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \Pi(i) e^{-qt} \frac{(qt)^i}{i!}$$

$$\underline{\Pi}(i) = \underline{\Pi}(i-1) Q^*$$

Introdução

- **Tipos possíveis de análise**
  - É possível encontrar medidas
    - Transientes (para um tempo t específico)
      - Quantos servidores estarão ocupados após 1 hora do início do atendimento?
    - Estacionárias (para um intervalo de tempo grande/ tendendo ao infinito)
      - Qual a porcentagem de tempo em que meu sistema estará disponível ao longo do ano?

Introdução

- O que representa a análise transiente?
- O que diferencia a análise transiente da análise estacionária?
- Quando é relevante usar a análise transiente?
- CTMCs ou DTMCs, onde é mais utilizada a análise transiente?

Introdução

- O cálculo do vetor de probabilidade do estado transiente π(t) para CTMCs é definido como:

$$\dot{\boldsymbol{\pi}}(t) = \frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{\pi}(t)}{\mathrm{d}\,t} = \boldsymbol{\pi}(t)\mathbf{Q}\,. \qquad (2.53)$$

- Assim, para o cálculo do vetor de probabilidade π(t), é necessário resolver a equação diferencial linear, dado o gerador infinitesimal da matriz Q e o vetor de probabilidade inicial π(0):

$$\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{\pi}(t)}{\mathrm{d}\,t} = \boldsymbol{\pi}(t)\mathbf{Q}\,, \quad \boldsymbol{\pi}(0) = (\pi_0(0), \pi_1(0), \dots)\,. \qquad (5.1)$$

Introdução

- Mediadas tomadas a partir da probabilidade de estados transientes podem ser referidas como medidas instantâneas, no entanto, por vezes, as medidas baseadas em execuções cumulativas de um período de tempo [0, t) podem ser mais relevantes, onde

$$\mathbf{L}(t) = \int_0^t \boldsymbol{\pi}(u)\,\mathrm{d}\,u$$

- Denota o vetor do tempo total esperado nos estados da CTMC durante o período de tempo indicado. Integrando a equação (2.53) obtem-se uma nova equação diferencial para L (*t*):

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{L}(t)}{\mathrm{d}\,t} = \mathbf{L}(t)\mathbf{Q} + \boldsymbol{\pi}(0)\,, \quad \mathbf{L}(0) = \mathbf{0}\,. \qquad (5.2)$$

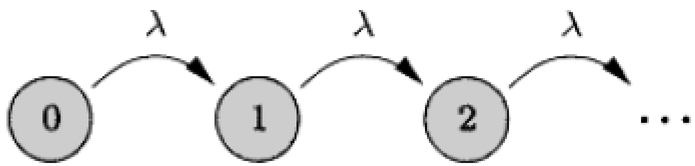
- Assim, medidas cumulativas podem ser diretamente calculada a partir desta solução transiente.

Análise Transiente UtilizandoMétodos Exatos

1. A Pure Birth Process
2. A two-state CMTC
3. Solution Using Laplace Transforms
4. Numerical Solution Using Uniformization
5. Other Numerical Methods

A Pure Birth Process

- Considerando uma CTMC de estados infinitos, que representa um processo de nascimento puro onde as transições possíveis são de estado k para o k + 1, com taxa de λ, onde para qualquer λ finito não haverá uma solução estacionária



- Matriz infinitésimal Q

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

A Pure Birth Process

- A partir da estrutura da matriz Q e do cálculo do vetor de probabilidade do estado transiente π(t) para CTMCs, obtém-se um sistema de equações diferenciais:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\pi_0(t) = -\lambda\pi_0(t)\,, \tag{5.3}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\pi_k(t) = -\lambda\pi_k(t) + \lambda\pi_{k-1}(t)\,, \quad k \geq 1\,. \tag{5.4}$$

- Onde as probabilidades de estado iniciais são:

$$\pi_k(0) = \begin{cases} 1 & k = 0\,, \\ 0 & k \geq 1\,, \end{cases} \tag{5.5}$$

- Fazendo as integrações e diferenciações, obtém-se a fórmula fechada:

$$\pi_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,, \quad k \geq 0\,. \tag{5.8}$$

- Por indução, um processo de nascimento de taxa constante dá origem a um Processo Poisson.

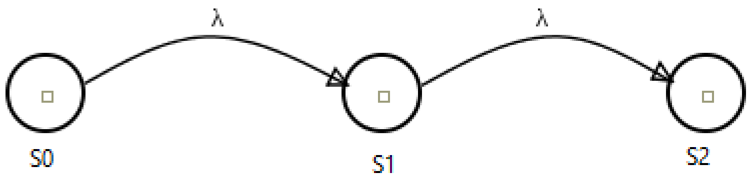
A Pure Birth Process

- Uma medida importante do processo de Poisson é a sua função valor médio m (t), definida como o número esperado de nascimentos no intervalo [0, t). Esta medida é calculada como:

$$\begin{aligned} m(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} i\pi_i(t) = \sum_{i=0}^{\infty} i \frac{(\lambda t)^i}{i!} \mathrm{e}^{-\lambda t} \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda t} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{i-1}}{(i-1)!} (\lambda t) = (\lambda t) \mathrm{e}^{-\lambda t} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^i}{i!} \\ &= (\lambda t) \mathrm{e}^{-\lambda t} \mathrm{e}^{\lambda t} = \lambda t \, . \end{aligned} \tag{5.9}$$

PRÁTICA

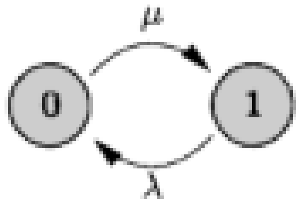
- Dada a cadeia de markov:



- Onde $\lambda = 0{,}2$.
- Numa análise para o tempo 5, determine a probabilidade para estado S2.
- Qual a m(5).

A Two-State CTMC

- Significa a realização de análise transiente de fórmula fechada para CTMC de dois estados.



- A matriz geradora da CTMC

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -\mu & \mu \\ \lambda & -\lambda \end{bmatrix}.$$

A Two-State CTMC

- A partir do sistema de equação diferencial de tempo homogêneo,

$$\frac{\mathrm{d}\,\pi_j(t)}{\mathrm{d}\,t} = \sum_{i \in S} q_{ij}\pi_i(t)\,, \quad \forall j \in S\,, \qquad (2.51)$$

- Obtém-se,

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\pi_0(t) &= -\mu\pi_0(t) + \lambda\pi_1(t), \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\pi_1(t) &= \mu\pi_0(t) - \lambda\pi_1(t). \end{aligned} \qquad (5.10)$$

- Aplicando a lei de probabilidade, conclui-se,

$$\pi_0(t) = 1 - \pi_1(t)\,,$$

A Two-State CTMC

- Sendo possível reescrever a equação na forma de:

$$\frac{d}{dt}\pi_1(t) = \mu(1 - \pi_1(t)) - \lambda\pi_1(t)$$

or:

$$\frac{d}{dt}\pi_1(t) + (\mu + \lambda)\pi_1(t) = \mu\,. \qquad (5.11)$$

- Sendo padrão para a análise de método diferencial linear é usar o método de fatores de integração, onde todos os lados da equação são multiplicados pelo fator de integração:

$$e^{\int(\mu+\lambda)\,dt} = e^{(\mu+\lambda)t}\,,$$

A Two-State CTMC

- A partir da multiplicação e reordenação, obtém-se:

$$\mu\,\mathrm{e}^{(\mu+\lambda)t} = \mathrm{e}^{(\mu+\lambda)t}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\pi_1(t) + (\mu+\lambda)\,\mathrm{e}^{(\mu+\lambda)t}\,\pi_1(t) \qquad (5.12)$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(\mathrm{e}^{(\mu+\lambda)t}\,\pi_1(t))\,. \qquad (5.13)$$

- Observa-se que a expressão de soma no lado direito da equação é igual ao derivativo do produto dos subtermos de modo que se tem os resultados da Eq. (5.13). Integrando a Eq. (5.13) em ambos os lados tem-se como um passo intermediário:

$$\frac{\mu}{\mu+\lambda}\,\mathrm{e}^{(\mu+\lambda)t} + c = \mathrm{e}^{(\mu+\lambda)t}\,\pi_1(t)\,. \qquad (5.14)$$

A Two-State CTMC

- Multiplicando por:

$$e^{-(\mu+\lambda)t}$$

- Fornece o resultado pretendido:

$$\pi_1(t) = \frac{\mu}{\mu+\lambda} + c\, e^{-(\mu+\lambda)t} \,. \qquad (5.15)$$

- Integração constante c reflete dependência das probabilidades de estado transiente no vetor de probabilidade inicial π (0). Assumindo, por exemplo,

$$\boldsymbol{\pi}^{(1)}(0) = (0, 1) \,,$$

resulta em,

$$\begin{aligned} 1 = \pi_1^{(1)}(0) &= \frac{\mu}{\mu+\lambda} + c\, e^{-(\mu+\lambda)0} \\ &= \frac{\mu}{\mu+\lambda} + c \,. \end{aligned}$$

A Two-State CTMC

- As expressões finais das probabilidades de estado transiente neste caso resultam em:

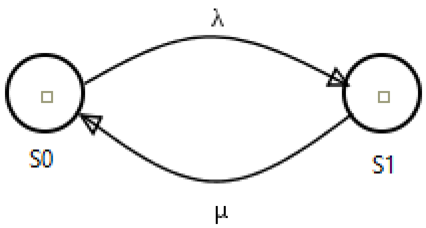
$$\pi_1^{(1)}(t) = \frac{\mu}{\mu+\lambda} + \frac{\lambda}{\mu+\lambda}\left(e^{-(\mu+\lambda)t}\right), \tag{5.16}$$

$$\begin{aligned}
\pi_0^{(1)}(t) &= 1 - \pi_1^{(1)}(t) \\
&= \frac{\mu+\lambda}{\mu+\lambda} - \frac{\mu+\lambda\left(e^{-(\mu+\lambda)t}\right)}{\mu+\lambda} \\
&= \frac{\lambda-\lambda\left(e^{-(\mu+\lambda)t}\right)}{\mu+\lambda} \\
&= \frac{\lambda}{\mu+\lambda} - \frac{\lambda}{\mu+\lambda}\left(e^{-(\mu+\lambda)t}\right).
\end{aligned} \tag{5.17}$$

- Com uma expressão de forma fechada das probabilidades de estado transiente dadas, medida de desempenho pode ser facilmente derivada.

Prática

- Dada a cadeia de markov:



- Onde λ = 100 e μ=1.
- Numa análise para o tempo 1, determine a probabilidade para estados S0 e S1.

Solution Using Laplace Transforms

- O Método de Laplace pode ser usado para a solução de equações diferenciais lineares, tais como:

$$\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{\pi}(t)}{\mathrm{d}\,t} = \boldsymbol{\pi}(t)\mathbf{Q}, \quad \boldsymbol{\pi}(0) = (\pi_0(0), \pi_1(0), \ldots)\,. \tag{5.1}$$

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{L}(t)}{\mathrm{d}\,t} = \mathbf{L}(t)\mathbf{Q} + \boldsymbol{\pi}(0)\,, \quad \mathbf{L}(0) = \mathbf{0}\,. \tag{5.2}$$

- No entanto, sua aplicabilidade é limitada a domínios de problemas com espaços pequenos estados ou para aqueles que implicam uma estrutura de matriz regular. Visto que, existem muitas dificuldades em cálculos de raízes de um polinômio e no cálculo da Laplace Inversa.

Solution Using Laplace Transforms

- Com o dado vector probabilidade inicial π (0), a transformada de Laplace

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\pi_0(t) = -\lambda\pi_0(t)\,, \tag{5.3}$$

produz a seguinte equação em termos de transformar a variável *s*:

$$s\boldsymbol{\pi}(s) - \boldsymbol{\pi}(0) = \boldsymbol{\pi}(s)\mathbf{Q}\,. \tag{5.18}$$

Que pode ser resolvido para o vetor de probabilidade transformada π (*s*):

$$\boldsymbol{\pi}(s) = \boldsymbol{\pi}(0)(s\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}\,. \tag{5.19}$$

Uniformisation

- CTMC's lidam com sistemas de equações diferenciais, assim seu comportamento transiente pode ser calculado a partir da função exponencial, agora em termos de vetores e matrizes, onde:

$$\underline{p}(t) = \underline{p}(0)e^{\mathbf{Q}t}. \qquad (15.38)$$

Que é igual a $\sum_{i=0}^{\infty}(\mathbf{Q}t)^i/i!,$

Não se mostra viável este cálculo direto, visto que:

- erros de arredondamento graves ocorrem normalmente devido ao fato de que a Q contém positivo, bem como negativos;
- as matrizes $(Qt)^i$ tornar-se não-esparsa o que requer maior capacidade de armazenamento.

- Para evitar estes problemas aplica-se o método chamado de uniformização (ou aleatorização - Randomization) também chamado de método de Jensen.

- Se λ é escolhido de tal forma que $\lambda \geq \max_i\{|q_{i,j}|\}$, e as entradas de **P** são entre 0 e 1, e a linha de P soma 1, P é uma matriz estocástica e descreve uma DTMC. O valor λ é chamado de taxa de uniformização e pode ser derivado de Q por inspeção.

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} + \frac{\mathbf{Q}}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Q} = \lambda(\mathbf{P} - \mathbf{I}). \tag{15.39}$$

Uniformisation

- Exemplo – uniformizando uma CTMC
  - Considere a CTMC dada por:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 6 & 0 & -6 \end{pmatrix}. \qquad (15.40)$$

  - e probabilidade inicial vector P (O) = (1, 0, O). Para a taxa de uniformização encontramos por inspeção: λ= 6, de modo que o correspondente DTMC é dada por:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (15.41)$$

Uniformisation

- Exemplo – uniformizando uma CTMC

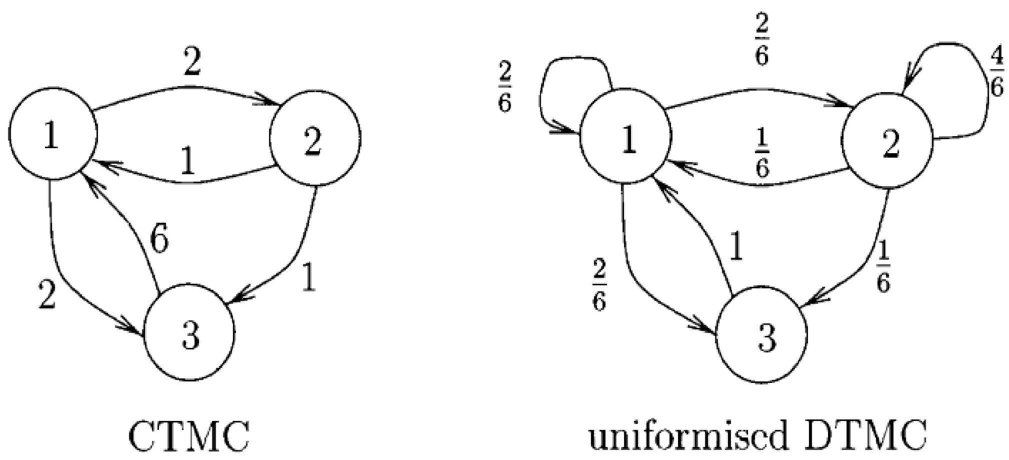


Figure 15.3: A small CTMC and the corresponding DTMC after uniformisation

Uniformisation

- Exemplo – uniformizando uma CTMC
  - A uniformização de uma CTMC numa DTMC pode ser entendido como se segue.
  - Na CTMC, os tempos de permanência nos estados são exponencialmente distribuídos. O estado com menor tempo de permanência nos fornece o valor de λ . Para esse estado, uma época na DTMC corresponde a um atraso negativo exponencialmente distribuído com taxa λ, após o qual um dos estados sucessores é selecionada probabilisticamente. Para os estados do CTMC que têm total de taxa de saída λ, os estados correspondentes no DTMC não terão auto-loops. Para os estados do CTMC com uma distribuição de tempo de permanância no estado com uma taxa menor do que (os estados tendo em média um tempo de permanência maior do estado), uma época na DTMC pode não ser suficiente; Assim, na próxima época esses estados pode ser revista. Isto se torna possível pela definição de P, em que estes estados têm auto-loops, isto é, $p_{i,i} > 0$.

Uniformisation

- Exemplo – uniformizando uma CTMC
  - Usando a matriz P, pode-se obter:

$$\underline{p}(t) = \underline{p}(0)e^{\mathbf{Q}t} = \underline{p}(0)e^{\lambda(\mathbf{P}-\mathbf{I})t} = \underline{p}(0)e^{-\lambda\mathbf{I}t}e^{\lambda\mathbf{P}t} = \underline{p}(0)e^{-\lambda t}e^{\lambda\mathbf{P}t}. \qquad (15.42)$$

  - Agora empregam uma expansão de séries de Taylor para a última matriz exponencial como segue

$$\underline{p}(t) = \underline{p}(0)e^{-\lambda t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^n\mathbf{P}^n}{n!} = \underline{p}(0)\sum_{n=0}^{\infty}\psi(\lambda t; n)\mathbf{P}^n, \qquad (15.43)$$

where

$$\psi(\lambda t; n) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}, \qquad (15.44)$$

  - são probabilidades Poisson, ou seja, $\psi(\lambda t; n)$ é a probabilidade de n eventos ocorrendo em [0, t) em um processo de Poisson com taxa λ. A matriz P, é uma matriz de probabilidade com todas as suas entradas entre 0 e 1, como são as probabilidades de Poisson.

Uniformisation

- A uniformização permite um algoritmo de solução interativa em que há a multiplicação de matrizes. Considerando a seguinte soma de vetores:

$$\underline{p}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi(\lambda t; n) \left(\underline{p}(0) \mathbf{P}^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi(\lambda t; n) \underline{\pi}_n, \qquad (15.45)$$

  - Onde π_n, é o vetor de distribuição de probabilidade de estado após n épocas na DTMC, com matriz de transição P, sendo derivado de forma recursiva como:

$$\underline{\pi}_0 = \underline{p}(0) \quad \text{and} \quad \underline{\pi}_n = \underline{\pi}_{n-1} \mathbf{P}, \quad n \in I\!N^+. \qquad (15.46)$$

  - A soma infinita em (15.45) deve ser truncada depois de k_e interações ou épocas na DTMC. iterações ou épocas no DTMC. Assim, calculando o vetor de probabilidade de estado ~p(t), tem-se:

$$\tilde{\underline{p}}(t) = \sum_{n=0}^{k_\epsilon} \psi(\lambda t; n) \underline{\pi}_n. \qquad (15.47)$$

Uniformisation

- O número de termos que tem que ser adicionada para atingir uma precisão pré-especificado ***e,*** *a priori,* pode agora ser calculado como se segue. A diferença entre o valor computado e o exato do vetor probabilidade transiente é delimitada como se segue:

$$||\underline{p}(t) - \tilde{\underline{p}}(t)|| \leq 1 - \sum_{n=0}^{k_\epsilon} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}. \qquad (15.48)$$

- Assim, temos que encontrar o valor de k_e, tal que $1 - \sum_{n=0}^{k_\epsilon} e^{-\lambda t} (\lambda t)^n / n! \leq \epsilon.$

Precisa-se do menor valor de k, que satisfaça:

$$\sum_{n=0}^{k_\epsilon} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \geq \frac{1-\epsilon}{e^{-\lambda t}} = (1-\epsilon) e^{\lambda t}. \qquad (15.49)$$

Prática

- Voltando ao exemplo:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 6 & 0 & -6 \end{pmatrix}. \qquad \mathbf{P} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para $\sum_{n=0}^{k_\epsilon} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \geq \frac{1-\epsilon}{e^{-\lambda t}} = (1-\epsilon)e^{\lambda t}.$

- Dado λ=6 e considerando $\varepsilon = 10^{-4}$

Prática

- Voltando ao exemplo:

t	0.1	0.2	0.5	1	5	10	20	50	100
k_ϵ	5	7	11	17	52	91	163	367	693

Dado λ=6 e considerando $\varepsilon=10^{-4}$

Para t=0.1 , tem-se: $(1-\varepsilon)\, e^{\lambda t} = (1-10^{-4})\, e^{0.6} = 1{,}8219$

$$\frac{\sum_{n=0}^{ke}(\lambda t)^n}{n!} \geq (1-\varepsilon)e^{\lambda t}$$

$$\frac{\sum_{n=0}^{4}(0.6)^n}{n!} = 1{,}8214$$

$$\frac{\sum_{n=0}^{5}(0{,}6)^n}{n!} = 1{,}8221$$

Prática

- Voltando ao exemplo:

t	0.1	0.2	0.5	1	5	10	20	50	100
k_ϵ	5	7	11	17	52	91	163	367	693

Dado t=0.1 Kε=5

$$\underline{\tilde{p}}(t) = \sum_{n=0}^{k_\epsilon} \psi(\lambda t; n)\underline{\pi}_n.$$

n ϵ {0, 1, 2, 3, 4, 5}

Dado P(O) = (1, 0, O).

^P(0)= P(O) = (1, 0, O), obtem-se:

^P(1), ^P(2), ^P(3), ^P(4), ^P(5), através de.

^P(n)= ^P($_{n-1}$) p, n ϵ {0, 1, 2, 3, 4, 5}.

Prática

- Voltando ao exemplo:

t	0.1	0.2	0.5	1	5	10	20	50	100
k_ϵ	5	7	11	17	52	91	163	367	693

Dado t=0.1 Kε=5

$$\tilde{\underline{p}}(t) = \sum_{n=0}^{k_\epsilon} \psi(\lambda t; n)\underline{\pi}_n .$$

n ϵ {0, 1, 2, 3, 4, 5}

φ (0,6,n) = [$e^{-0,6}$ $(0,6)^n$]/n! , n ϵ {0, 1, 2, 3, 4, 5}

^P(0.1)= $\sum_{n=0}^{5} \varphi(0{,}6, n)\,\hat{}\,P(n)$

Prática

- Voltando ao exemplo:

t	0.1	0.2	0.5	1	5	10	20	50	100
k_ϵ	5	7	11	17	52	91	163	367	693

Dado t=0.1 Kε=5

$\varphi(0{,}6,n) = [e^{-0{,}6} (0{,}6)^n]/n!$, $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$\varphi(0{,}6,0) = [e^{-0{,}6} (0{,}6)^0]/0!$

$\varphi(0{,}6,1) = [e^{-0{,}6} (0{,}6)^1]/1!$

$\varphi(0{,}6,2) = [e^{-0{,}6} (0{,}6)^2]/2!$

$\varphi(0{,}6,3) = [e^{-0{,}6} (0{,}6)^3]/3!$

$\varphi(0{,}6,4) = [e^{-0{,}6} (0{,}6)^4]/4!$

$\varphi(0{,}6,5) = [e^{-0{,}6} (0{,}6)^5]/5!$

Prática

- Voltando ao exemplo:

t	0.1	0.2	0.5	1	5	10	20	50	100
k_ϵ	5	7	11	17	52	91	163	367	693

Dado t=0.1 Kε=5

^P(0.1)= $\sum_{n=0}^{5} \varphi(0{,}6, n)\,\hat{}P(n)$, n ϵ {0, 1, 2, 3, 4, 5}

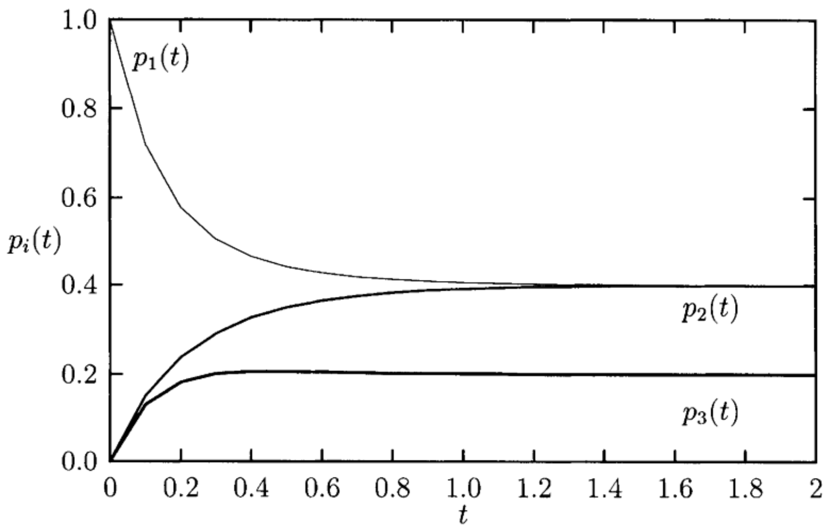
^P(0.1) = (0.71, 0.1502, 0.1268)

Prática

- Voltando ao exemplo:

t	0.1	0.2	0.5	1	5	10	20	50	100
k_ϵ	5	7	11	17	52	91	163	367	693

Dado t=0.1 Kε=5



'igure 15.4: First two seconds in the evolution of the three-state CTMC computing via
niformisation

Other Numerical Methods

- Equações diferenciais Ordinárias
  - Técnica padrão para a solução de equações diferenciais ordinárias (ODE) pode ser utilizado para a solução numérica das equações diferenciais de Kolmogorov de uma CTMC. Tais métodos de solução discretizam o intervalo de solução para um número finito de intervalos de tempo *{t1 , t2,. . . , ti, . . . , tn}.*

Other Numerical Methods

- Equações diferenciais Ordinárias
  - Em um método explícito, a solução π (ti) é aproximada com base em valores π (tj) para j < i. Embora os métodos baseados em ODE explícitas geralmente proporcionam bons resultados para modelos não-“stiff”, eles são inadequados se modelos “stiff” precisam ser estudados. Note que “stiff” CTMCs são comumente encontradas na modelagem confiabilidade.

Other Numerical Methods

- Equações diferenciais Ordinárias
  - Em um método implícito, a solução $\pi(t_i)$ é aproximada com base em valores $\pi(t_j)$ para $j \leq i$. Em cada passo de tempo uma solução de sistema linear é necessária, num método implícito. O aumento da sobrecarga é compensado por melhores propriedades de estabilidade e menor complexidade computacional em modelos “Stiff”.

- Runge-Kutta
  - Ideia base é aproximar o vetor de função continua que segue a partir da equação diferencial por uma função discreta com o tamanho de passos fixos.
  - Métodos de Runge-Kutta são chamados de *single-step*
  - Método de 4ª ordem ou RK4

$$\underline{\tilde{\pi}}_{i+1} = \underline{\tilde{\pi}}_i + \frac{h}{6}(\underline{k}_1 + 2\underline{k}_2 + 2\underline{k}_3 + \underline{k}_4),$$

$$\begin{cases} \underline{k}_1 = \underline{\tilde{\pi}}_i \mathbf{Q}, \\ \underline{k}_2 = (\underline{\tilde{\pi}}_i + \frac{h}{2}\underline{k}_1)\mathbf{Q}, \\ \underline{k}_3 = (\underline{\tilde{\pi}}_i + \frac{h}{2}\underline{k}_2)\mathbf{Q}, \\ \underline{k}_4 = (\underline{\tilde{\pi}}_i + h\underline{k}_3)\mathbf{Q}. \end{cases}$$

Com o método clássico de Runge-Kutta de quarta ordem, com passos igual a 0,5 resolva o seguinte problema de valor inicial no intervalo de X = 0 a 2 e valor inicial de y = 1

$$\frac{dy}{dx} = yx^2 - 1.2y$$

Usando métodos exatos

Aggregation of Stiff Markov Chains

- Bobbio e Trivedi [BoTr86] introduziram um método aproximado para o cálculo das probabilidades de estado transitório de CTMCs finitos que pode ser considerado como uma extensão do método Courtois

- Não só proporciona uma técnica para uma computação eficiente aproximados das probabilidades de estado transitório de possivelmente grandes CTMCs, mas também é muitas vezes o caso em que outras técnicas numéricas transitórios falhar.

Aggregation of Stiff Markov Chains >> Outline and Basic Definitions

- Análise transiente é muitas vezes realizado por modelos que apresentam a chamada propriedade de *stiffness* [Bobbio e Trivedi]
- Estado *fast*(rápido)
- Estado *slow*(lento)
- O cálculo atual das probabilidades de estado transitório só é realizada para macroestados *slow* ou *aggregated*.

Aggregation of Stiff Markov Chains >> Outline and Basic Definitions

- Por definição, apenas transições lentas são possíveis entre esses subgrupos S_I e S_J. Uma aproximação para π(t) é derivada, onde π(t) é a solução da equação diferencial

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\boldsymbol{\pi}(t) = \boldsymbol{\pi}(t)\mathbf{Q}\,, \quad \boldsymbol{\pi}(0) = \left(\pi_{0_0}(0), \pi_{0_1}(0), \ldots, \pi_{F_{n_F-1}}(0)\right)$$

- A reorganização da matriz Q forma a base para criar o gerador de macroestado matriz ∑ pode ser realizada em 3 passos

Usando métodos exatos

Aggregation of Stiff Markov Chains >> Outline and Basic Definitions

1) Agregação dos subconjuntos recorrentes rápidas em macroestados e o correspondente adaptação das taxas de transição entre os macroestados e permanecendo rápido estados transitórios, resultando na matriz geradora intermediário $\tilde{\Sigma}$
2) os estados transitórios rápidos são eliminadas e as taxas de transição entre os restantes estados lentas são ajustadas, produzindo o último gerador matriz Σ
3) o estado de probabilidade vetor inicial $\pi(0)$ é condensada em $\sigma(0)$ de acordo com o padrão de agregação.

Usando métodos exatos

Aggregation of Stiff Markov Chains >> Outline and Basic Definitions

- Solução transiente de equação diferencial descrever as interações de longo prazo entre os macroestados:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\boldsymbol{\sigma}(t) = \boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\Sigma}\,,$$

$$\boldsymbol{\sigma}(0) = \left(\sigma_{0_0}(0), \ldots, \sigma_{0_{n_0-1}}(0), \sigma_1(0), \ldots, \sigma_{F-1}(0)\right)$$

Usando métodos exatos

Algoritmo

1. Inicialização
2. Análise estacionário de subconjuntos rápidos recorrentes
3. Construir a matrix geradora intermediaria
4. Agregação de estados transientes rápidos
5. Agregação do vetor de probabilidade inicial do estado σ(0):
6. Cálculo do vetor de probabilidade transiente do macroestado σ(t)
7. As desagregações

Usando métodos exatos

Algoritmo

1. Inicialização

- Definir o valor limite taxa de transição, como uma função do horizonte de tempo T para o qual a análise transiente é para ser realizada.
- Particionar o espaço de estados S_0 em estados lento para que estados e rápidos $S - S_0$ em relação a
- Particionar os estados rápido S-S_0 mais rápidos em subconjuntos recorrentes S_l, $1 \leq l \leq F - 1$ e, possivelmente, um subconjunto de estados transitórios rápidos S_F
- Organizar a infinitesimal matriz geradora Q acordo com a Eq. (5.35).

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{00} & \mathbf{A}_{01} & \cdots & \mathbf{A}_{0F} \\ \mathbf{A}_{10} & \mathbf{Q}_{1} & \cdots & \mathbf{A}_{1F} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{(F-1)0} & \cdots & \mathbf{Q}_{F-1} & \mathbf{A}_{(F-1)F} \\ \mathbf{A}_{F0} & \cdots & \mathbf{A}_{F(F-1)} & \mathbf{A}_{FF} \end{pmatrix}$$

Algoritmo

2. Análise estacionário de subconjuntos rápidos recorrentes

- As de submatrizes Q_I (Eq. (5.35)), obter gerador infinitesimal matrizes Q_I* de acordo com a Eq. (5,38).
- Calcule o condicional microestado vetores de probabilidade pi * I de acordo com a Eq. (5,39).

$$\mathbf{Q}_I^* = \mathbf{Q}_I + \mathbf{D}_I \, . \qquad (5.38)$$

$$\pi_I^* \mathbf{Q}_I^* = 0 \, , \quad \pi_I^* 1 = 1 \qquad (5.39)$$

Algoritmo

3. Construir a matrix geradora intermediaria, como na Eq. (5.49)

$$\tilde{\mathbf{\Sigma}} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{\Sigma}}_{MM} & \tilde{\mathbf{\Sigma}}_{MF} \\ \tilde{\mathbf{\Sigma}}_{FM} & \tilde{\mathbf{\Sigma}}_{FF} \end{pmatrix} . \qquad (5.49)$$

- Use Q a partir da Eq. (5,35) e π_I* I, 1 < I < F - 1 de Eq. (5,39) e aplicar operações a partir de Eq. (5,40) através da equação. (5,48).

$$\tilde{\mathbf{\Sigma}}_{00} = \mathbf{A}_{00}, \quad [n_0 \text{ x } n_0] . \qquad (5.40)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}_{II} &= -\sum_{J,I\neq J} \tilde{\Sigma}_{IJ}, \quad [1 \text{ x } 1] \\ &= -\left(\tilde{\mathbf{\Sigma}}_{I0}\mathbf{1} + \sum_{J,J\geq 1,J\neq I} \tilde{\Sigma}_{IJ} + \tilde{\mathbf{\Sigma}}_{IF}\mathbf{1} \right) \\ &= -\left(\boldsymbol{\pi}_I^* \mathbf{A}_{I0}\mathbf{1} + \sum_{J,J\geq 1,J\neq I} \boldsymbol{\pi}_I^* \mathbf{A}_{IJ}\mathbf{1} + \boldsymbol{\pi}_I^* \mathbf{A}_{IF}\mathbf{1} \right) . \end{aligned} \qquad (5.48)$$

Usando métodos exatos

Algoritmo

4. Agregação de estados transientes rápidos:

- SE $S_f \neq 0$
  - ENTÃO realizar a agregação de estados transientes rápidos e construa $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}^{\approx}_{MM}$

    * Calcule o P_{FM} interruptor probabilística de acordo com a Eq. (5.57)

de , de acordo com a Eq. (5,55) e Eq. (5.56) a partir de .

    * $\boldsymbol{\Sigma} = \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}^{\approx}_{MM}$

  - SE NÃO $\boldsymbol{\Sigma} = \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}$

$$= \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\approx}_{M}(t)\left(\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{MM} - \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{MF}\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}_{FF}\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{FM}\right) \tag{5.55}$$

$$= \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\approx}_{M}(t)\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}^{\approx}_{MM}\,. \tag{5.56}$$

$$\mathbf{P}_{FM} = -\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}_{FF}\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{FM} \tag{5.57}$$

Algoritmo

5. Agregação do vetor inicial do estado de probabilidade σ(0):

- Acumule probabilidades iniciais de $\pi_{I_i}(0)$ de microestados *i* ∈ S_I em $\tilde{\sigma}_I(0)$, 1 ≤ I ≤ F - 1 de acordo com a Eq. (5,58)
- SE $S_F \neq 0$
  - ENTÃO Calcule o vetor de probabilidade inicial do macroestado $\boldsymbol{\sigma}(0) = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{M}^{\approx}(0)$ de acordo com a Eq. (5.59).
  - SE NÃO $\boldsymbol{\sigma}(0) = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(0)$ de acordo com a Eq. (5.58).

$$\tilde{\sigma}_I(0) = \boldsymbol{\pi}_I(0)\mathbf{1}. \qquad (5.58)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{M}^{\approx}(0) = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(0) + \boldsymbol{\pi}_F(0)\mathbf{P}_{FM}\,. \qquad (5.59)$$

Usando métodos exatos

Algoritmo

6. Cálculo do vetor de probabilidade transiente do macroestado σ(t)

- Resolva Eq. (5,37).

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\boldsymbol{\sigma}(t) = \boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\Sigma}\,, \qquad (5.37)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(0) = \left(\sigma_{0_0}(0), \ldots, \sigma_{0_{n_0-1}}(0), \sigma_1(0), \ldots, \sigma_{F-1}(0)\right)\,.$$

Algoritmo

7. As desagregações

- Se $S_F \neq 0$
  - ENTÃO

    * Compute intermediário estado transitório probabilidade vetor σ(t) de acordo com a Eq. (5,62).

    * Calcule a probabilidade aproximada dos subvectores de micro-estado $\pi_I^{\approx}(t)$ por incondicionamento de π_I^* de acordo com a Eq. (5,64) para todos

    $1 \leq I \leq F-1$

  - SE NÃO Calcule $\pi_I^{\approx}(t)$ por incondicionamento de acordo com a Eq. (5,63) para todo $1 \leq I \leq F-1$

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t) \approx \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\approx(c)}(t) = \frac{1}{c}\left(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_M^{\approx}(t), \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_F^{\approx}(t)\right) . \qquad (5.62)$$

$$\boldsymbol{\pi}_I(t) \approx \boldsymbol{\pi}_I^{\approx}(t) = \left(\tilde{\sigma}_I^{\approx(c)}(t)\boldsymbol{\pi}_I^*\right) . \qquad (5.64)$$

$$\boldsymbol{\pi}_I(t) \approx \boldsymbol{\pi}_I^{\approx}(t) = \left(\sigma_I(t)\boldsymbol{\pi}_I^*\right) . \qquad (5.63)$$

Usando métodos exatos

Algoritmo

8. Resultado Final

- Componha o vetor de probabilidade transiente aproximado $\boldsymbol{\pi}(t) \approx \boldsymbol{\pi}^{\approx}(t)$ de acordo com a Eq. (5.65) se $S_F \neq \emptyset$ ou a Eq. (5.66) se $S_F = \emptyset$.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\pi}(t) \approx \boldsymbol{\pi}^{\approx}(t) = \Big(& \tilde{\sigma}_{0_0}^{\approx(c)}(t), \ldots, \tilde{\sigma}_{0_{n_0-1}}^{\approx(c)}(t), \\ & \tilde{\sigma}_1^{\approx(c)}(t)\pi_{1_0}^*, \ldots, \tilde{\sigma}_{F-1}^{\approx(c)}(t)\pi_{F-1_{n_{F-1}-1}}^*, \\ & \tilde{\sigma}_{F_0}^{\approx(c)}(t), \ldots, \tilde{\sigma}_{F_{n_F-1}}^{\approx(c)}(t)\Big) \\ = \Big(& \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_0^{\approx(c)}(t), \boldsymbol{\pi}_1^{\approx}(t), \ldots, \boldsymbol{\pi}_{F-1}^{\approx}(t), \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_F^{\approx(c)}(t)\Big) . \qquad (5.65)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\pi}(t) \approx \boldsymbol{\pi}^{\approx}(t) = \Big(& \tilde{\sigma}_{0_0}(t), \ldots, \tilde{\sigma}_{0_{n_0-1}}(t), \\ & \tilde{\sigma}_1(t)\pi_{1_0}^*, \ldots, \tilde{\sigma}_{F-1}(t)\pi_{F-1_{n_{F-1}-1}}^*\Big) \\ = \Big(& \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_0(t), \boldsymbol{\pi}_1^{\approx}(t), \ldots, \boldsymbol{\pi}_{F-1}^{\approx}(t)\Big) . \qquad (5.66)\end{aligned}$$

OBRIGADA!

FIM