

Simulação Transiente

Professores: Paulo Maciel
Ricardo Massa

Alunos: Jackson Nunes
Marco Eugênio Araújo

Dezembro de 2014

1

Sumário

- O que é Simulação?
- Áreas de Aplicação de Simulação
- Fases de um modelo de Simulação
- Classificação de Sistema, Modelo e Simulação
- Simulação Transiente
 - Regime transitório x permanente
- Prática 1 (no Excel)
- Rodada e Replicação
- Análise de Replicação
- Práticas 2, 3 e 4

O que é Simulação?

- É a representação virtual de um sistema da vida real através de um modelo.
- Torna possível o estudo de um sistema sem que seja necessário construí-lo.
- Permite fazer modificações e estudar os resultados de um sistema, sem a necessidade de alteração do ambiente real.
- Torna-se uma poderosa ferramenta na análise de processos e sistemas complexos.

O que é Simulação?

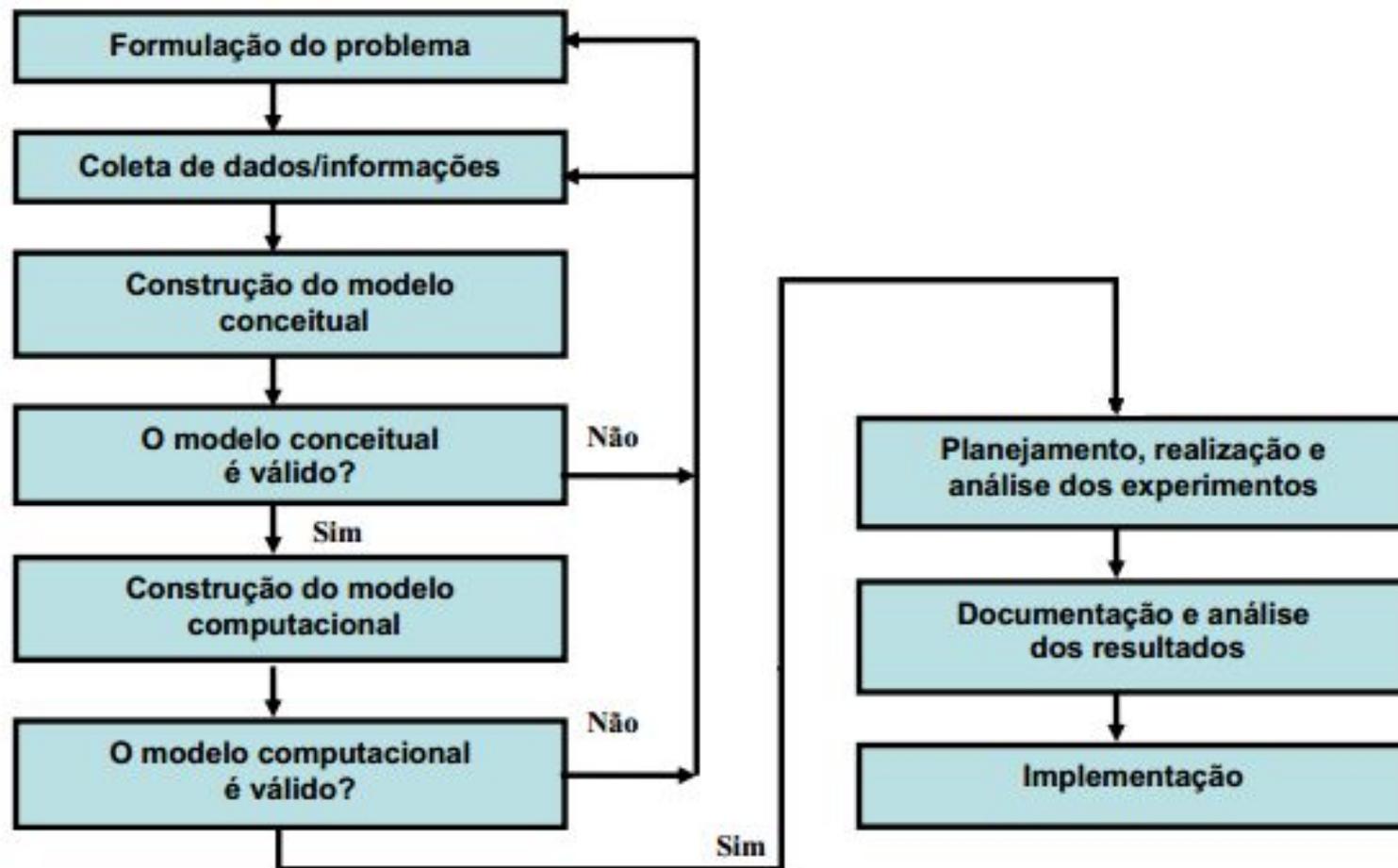
- O processo de análise dos resultados de simulações realizadas com um modelo computacional, lida com os dados obtidos a partir dos experimentos.
- Seu principal objetivo é permitir a realização de inferências e previsões sobre o comportamento e o desempenho do sistema real sob análise.
- A principal razão para uma maior atenção aos processos de análise dos resultados das simulações, baseia-se no fato de, em geral, os modelos apresentarem um comportamento estocástico semelhante aos sistemas que estão imitando.

Algumas Áreas de Aplicação de Simulação

- Aeroportos e Portos;
- Bancos;
- Call Centers;
- Escritórios;
- Hospitais;
- Empreendimentos de Diversão;
- Restaurantes e Fast-Foods;
- Supermercados.

Fases de um modelo de simulação

- Concepção ou formulação, Implementação, Análise dos resultados do modelo.



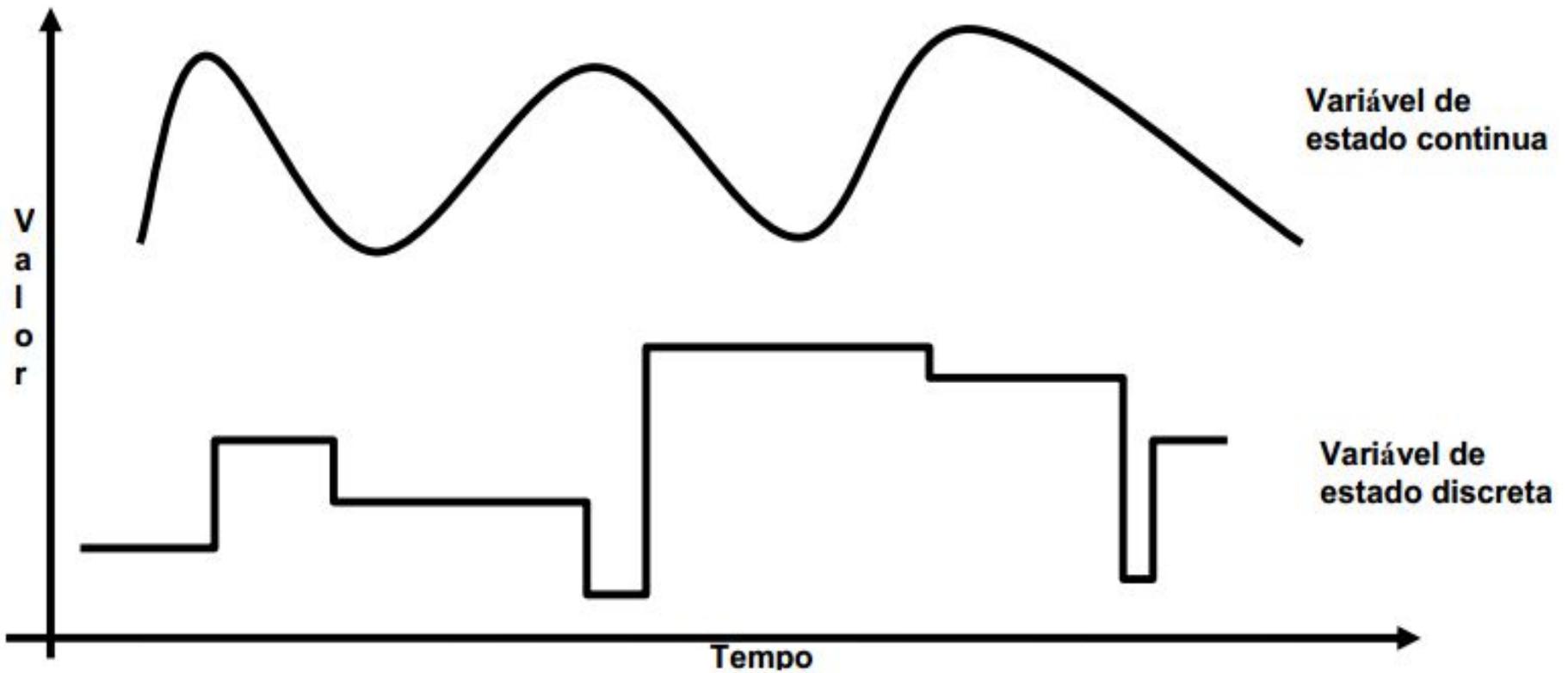
Classificação de Sistema, Modelo e Simulação

SISTEMA	MODELO		SIMULAÇÃO
DISCRETO: Variáveis envolvidas assumem valores finitos ou infinitos numeráveis	DETERMINÍSTICO: Variáveis assumem valores determinados.	ESTÁTICO: Estuda o sistema sem levar em conta sua variabilidade com o tempo.	TRANSIENTE: Há interesse no estudo do sistema num dado intervalo de tempo.
CONTÍNUO: Varáveis mudam constantemente com o tempo	ESTOCÁSTICO: Variáveis assumem valores diversos segundo uma determinada distribuição de probabilidades.	DINÂMICO: Representa o sistema a qualquer tempo.	ESTACIONÁRIA: Há o interesse em estudar o sistema a partir de um determinado estado estável, podendo prolongar-se indefinidamente.

Classificação de Sistema, Modelo e Simulação

SISTEMA	MODELO		SIMULAÇÃO
DISCRETO: Variáveis envolvidas assumem valores finitos ou infinitos numeráveis	DETERMINÍSTICO: Variáveis assumem valores determinados.	ESTÁTICO: Estuda o sistema sem levar em conta sua variabilidade com o tempo.	TRANSIENTE: Há interesse no estudo do sistema num dado intervalo de tempo.
CONTÍNUO: Varáveis mudam constantemente com o tempo	ESTOCÁSTICO: Variáveis assumem valores diversos segundo uma determinada distribuição de probabilidades.	DINÂMICO: Representa o sistema a qualquer tempo.	ESTACIONÁRIA: Há o interesse em estudar o sistema a partir de um determinado estado estável, podendo prolongar-se indefinidamente.

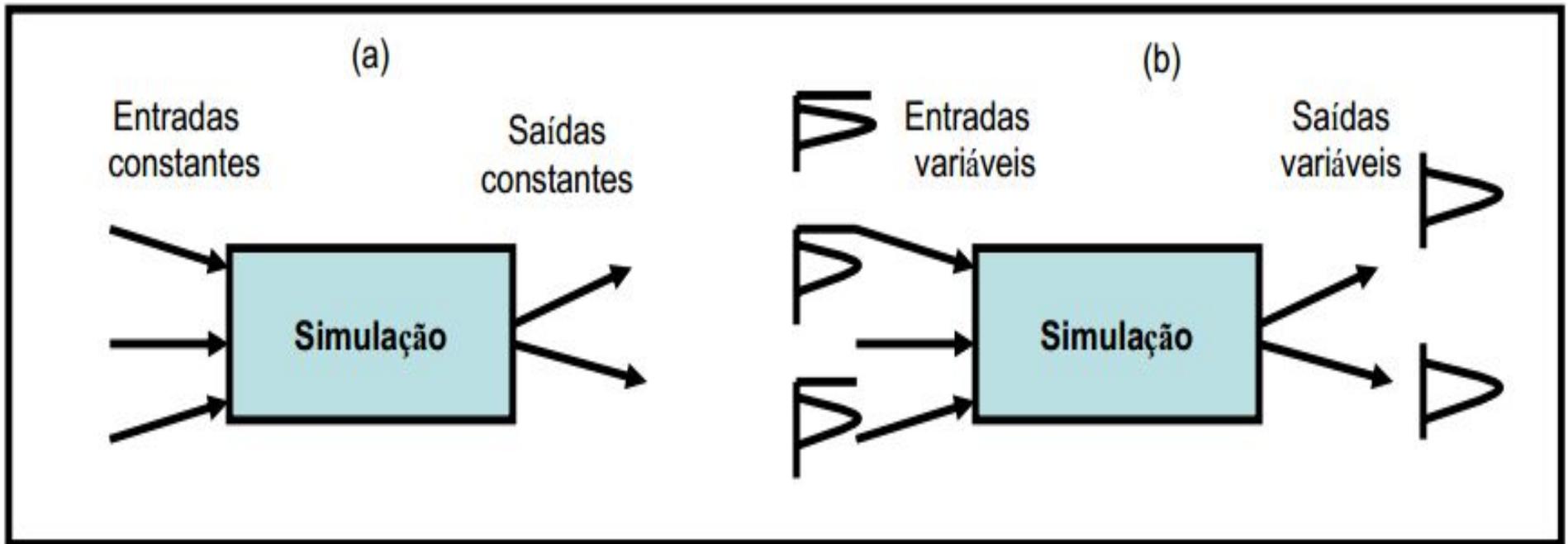
Simulação Discreta x Contínua



Classificação de Sistema, Modelo e Simulação

SISTEMA	MODELO	SIMULAÇÃO	
DISCRETO: Variáveis envolvidas assumem valores finitos ou infinitos numeráveis	DETERMINÍSTICO: Variáveis assumem valores determinados.	ESTÁTICO: Estuda o sistema sem levar em conta sua variabilidade com o tempo.	TRANSIENTE: Há interesse no estudo do sistema num dado intervalo de tempo.
CONTÍNUO: Varáveis mudam constantemente com o tempo	ESTOCÁSTICO: Variáveis assumem valores diversos segundo uma determinada distribuição de probabilidades.	DINÂMICO: Representa o sistema a qualquer tempo.	ESTACIONÁRIA: Há o interesse em estudar o sistema a partir de um determinado estado estável, podendo prolongar-se indefinidamente.

Simulação Determinística x Estocástica



Classificação de Sistema, Modelo e Simulação

SISTEMA	MODELO	SIMULAÇÃO	
DISCRETO: Variáveis envolvidas assumem valores finitos ou infinitos numeráveis	DETERMINÍSTICO: Variáveis assumem valores determinados.	ESTÁTICO: Estuda o sistema sem levar em conta sua variabilidade com o tempo.	TRANSIENTE: Há interesse no estudo do sistema num dado intervalo de tempo.
CONTÍNUO: Varáveis mudam constantemente com o tempo	ESTOCÁSTICO: Variáveis assumem valores diversos segundo uma determinada distribuição de probabilidades.	DINÂMICO: Representa o sistema a qualquer tempo.	ESTACIONÁRIA: Há o interesse em estudar o sistema a partir de um determinado estado estável, podendo prolongar-se indefinidamente.

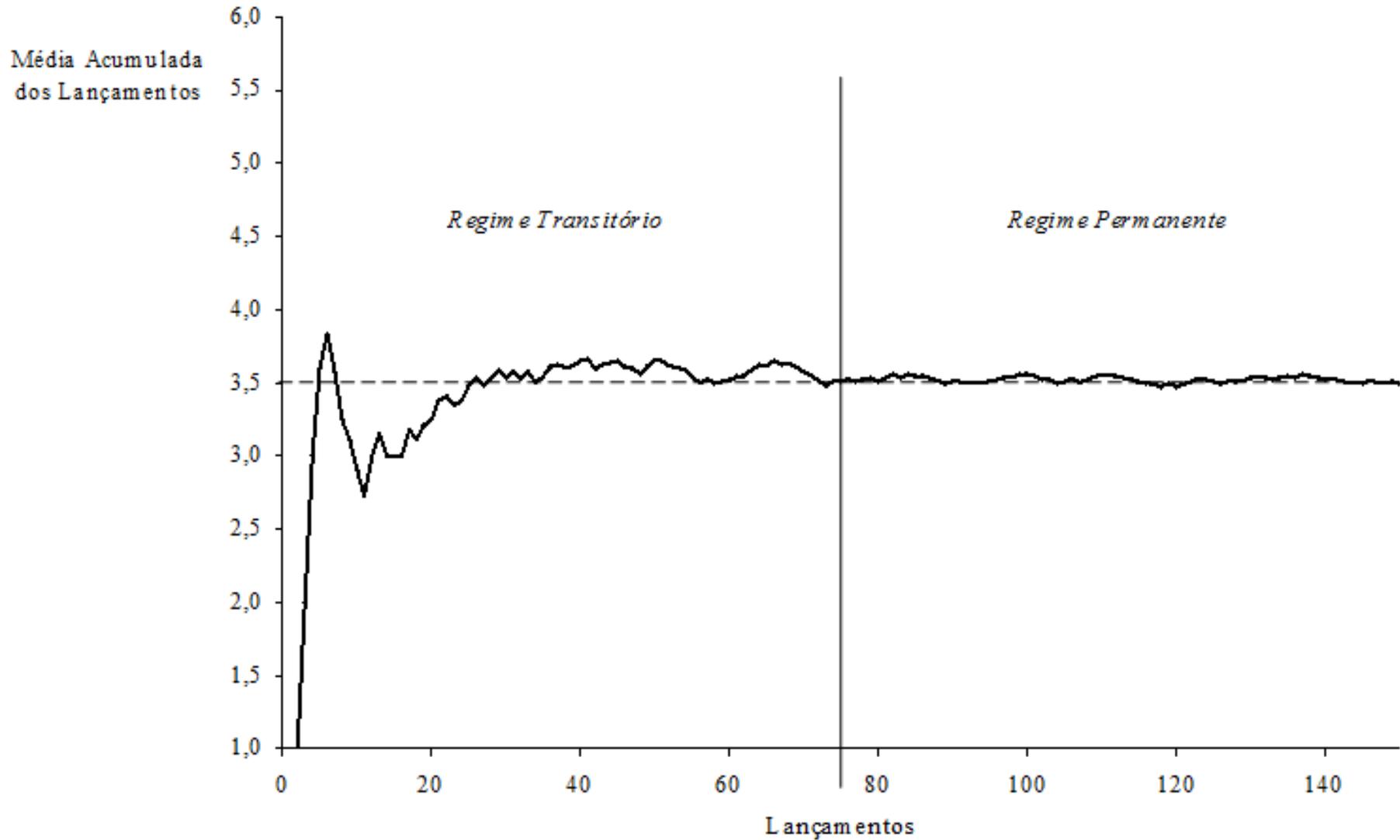
Simulação Estática X Dinâmica

- Simulação Estática é a representação de um sistema em um dado momento (Ex.: Simulação de Monte Carlo)
- Simulação Dinâmica é a representação de um sistema no decorrer do tempo.

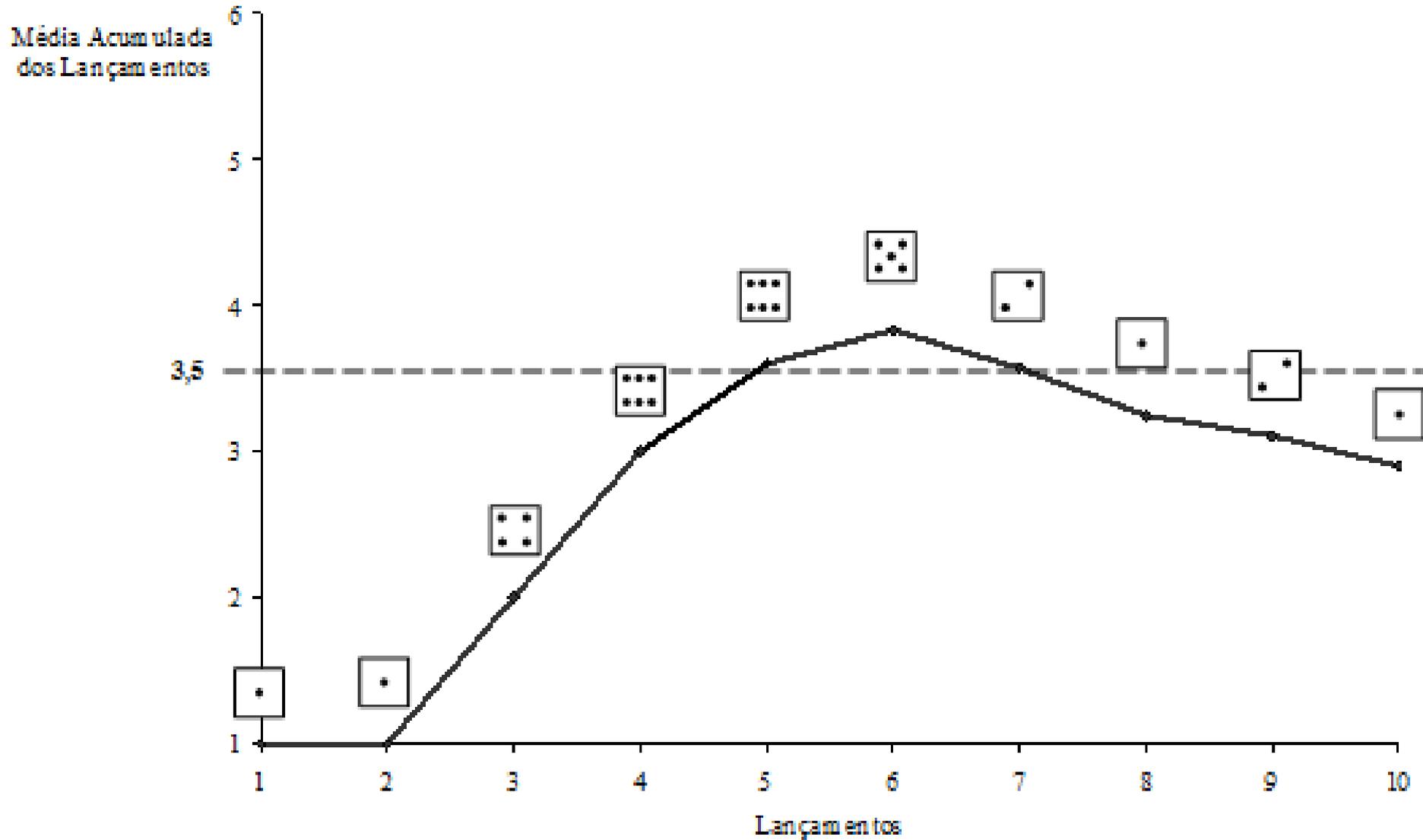
Classificação de Sistema, Modelo e Simulação

SISTEMA	MODELO		SIMULAÇÃO
DISCRETO: Variáveis envolvidas assumem valores finitos ou infinitos numeráveis	DETERMINÍSTICO: Variáveis assumem valores determinados.	ESTÁTICO: Estuda o sistema sem levar em conta sua variabilidade com o tempo.	TRANSIENTE: Há interesse no estudo do sistema num dado intervalo de tempo.
CONTÍNUO: Varáveis mudam constantemente com o tempo	ESTOCÁSTICO: Variáveis assumem valores diversos segundo uma determinada distribuição de probabilidades.	DINÂMICO: Representa o sistema a qualquer tempo.	ESTACIONÁRIA: Há o interesse em estudar o sistema a partir de um determinado estado estável, podendo prolongar-se indefinidamente.

Simulação Transiente X Estacionária

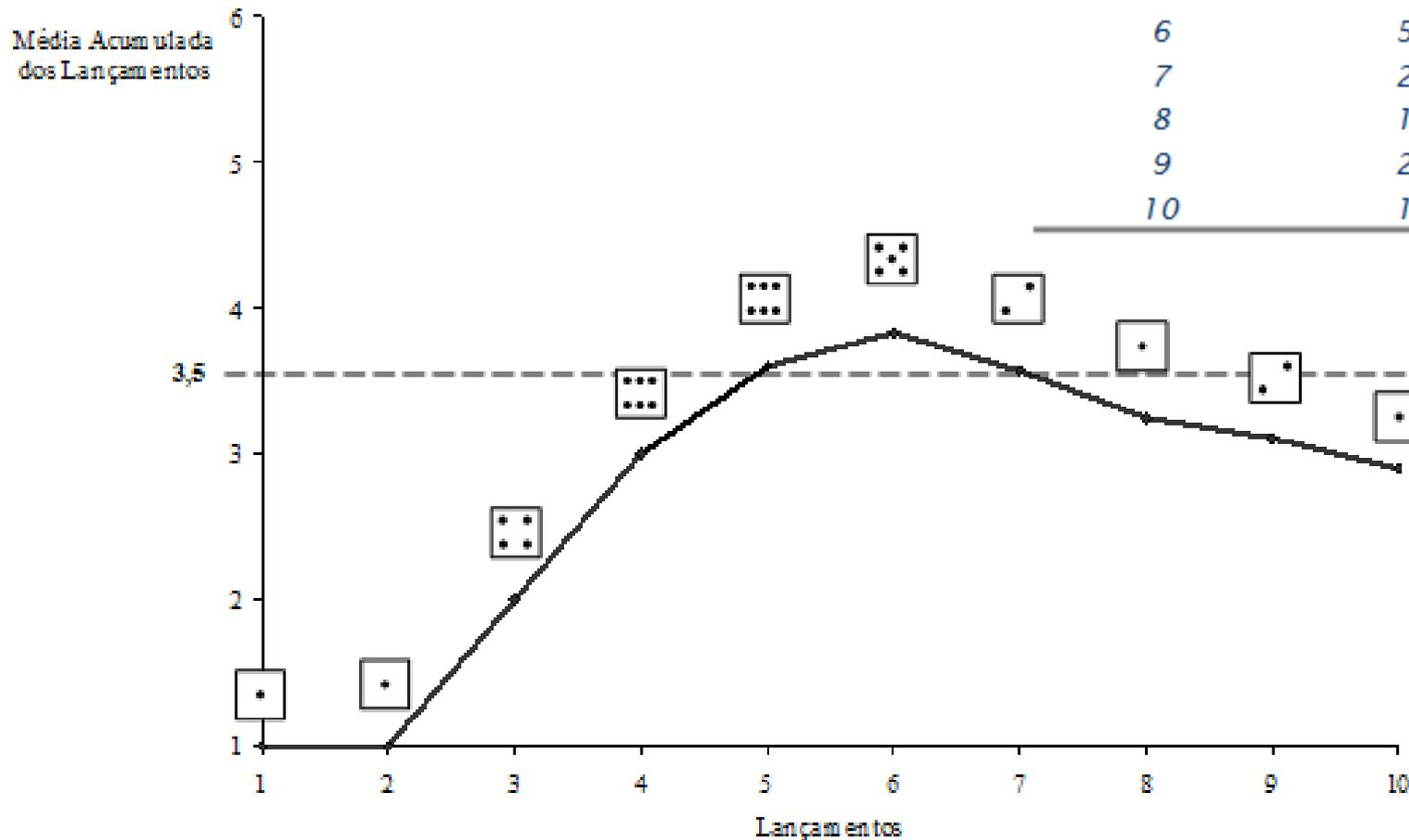


Simulação Transiente



Simulação Transiente

Lançamento	Número Obtido	Média Acumulada
1	1	$1/1=1,0$
2	1	$(1+1)/2=1,0$
3	4	$(1+1+4)/3=2,0$
4	6	$(1+1+4+6)/4=3,0$
5	6	3,6
6	5	3,8
7	2	3,6
8	1	3,3
9	2	3,1
10	1	2,9



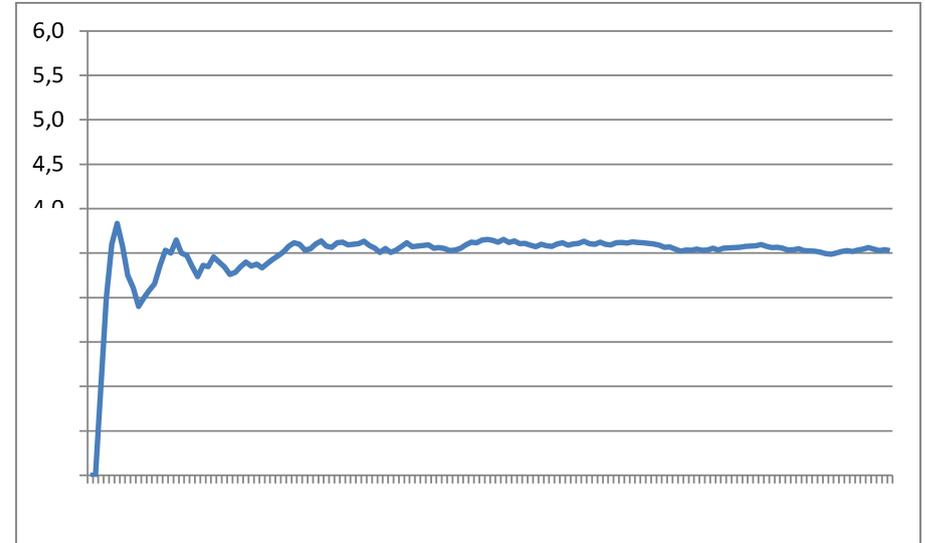
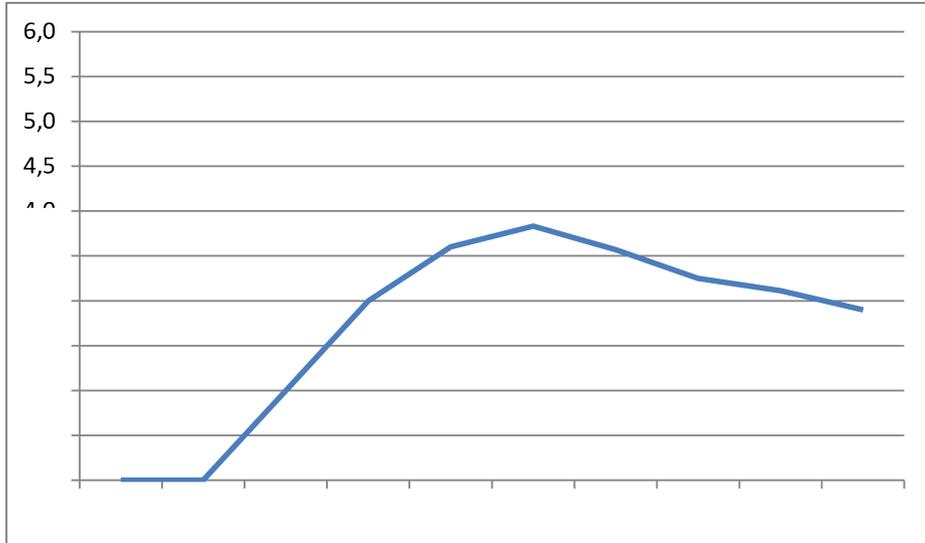
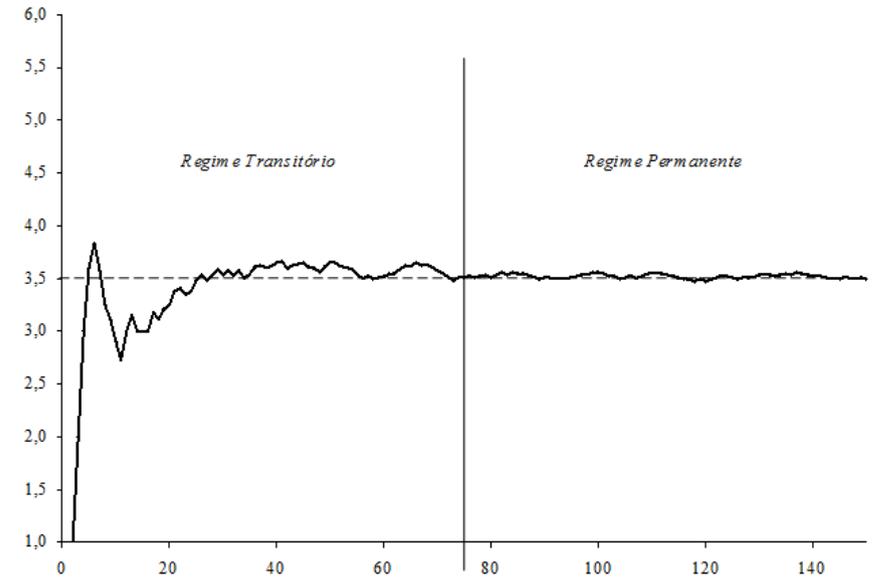
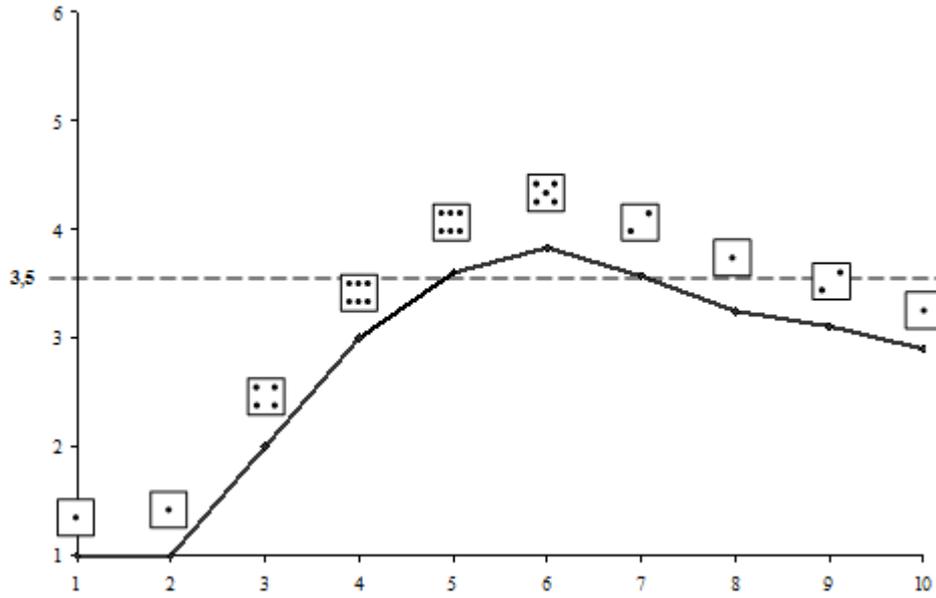
Prática 1

- Considere um dado de 6 faces;
- Simular, no Excel, o lançamento do dado por 10 vezes;
- Repetir o procedimento, simulando o lançamento do dado 150 vezes;
- Calcular a média acumulada dos valores dos lançamentos, nos dois cenários, e gerar o gráfico de linha a partir dos resultados;
- Definir os regimes transitório e permanente.

Prática 1

<i>Lançamento</i>	<i>Número Obtido</i>	<i>Média Acumulada</i>
1	1	$1/1=1,0$
2	1	$(1+1)/2=1,0$
3	4	$(1+1+4)/3=2,0$
4	6	$(1+1+4+6)/4=3,0$
5	6	3,6
6	5	3,8
7	2	3,6
8	1	3,3
9	2	3,1
10	1	2,9

Prática 1: Regime transitório X permanente



Rodada e Replicação

- **Rodada:** é o que ocorre quando selecionamos ou iniciamos o comando que executa a simulação no computador. Uma rodada pode envolver várias replicações.
- **Replicação:** é uma repetição da simulação do modelo, com a mesma configuração, a mesma duração e com os mesmos parâmetros de entrada, mas com uma semente de geração dos números aleatórios diferente.

Rodada e Replicação

- **Ex:** fila de banco.

<i>Replicação</i>	<i>Média de Pessoas em Fila</i>
1	6,72
2	2,00
3	0,38
4	1,28
5	0,46
6	0,19
7	0,14
8	1,30
9	0,12
10	2,85
<i>Média de 10 replicações</i>	1,54
<i>Desvio Padrão</i>	2,03

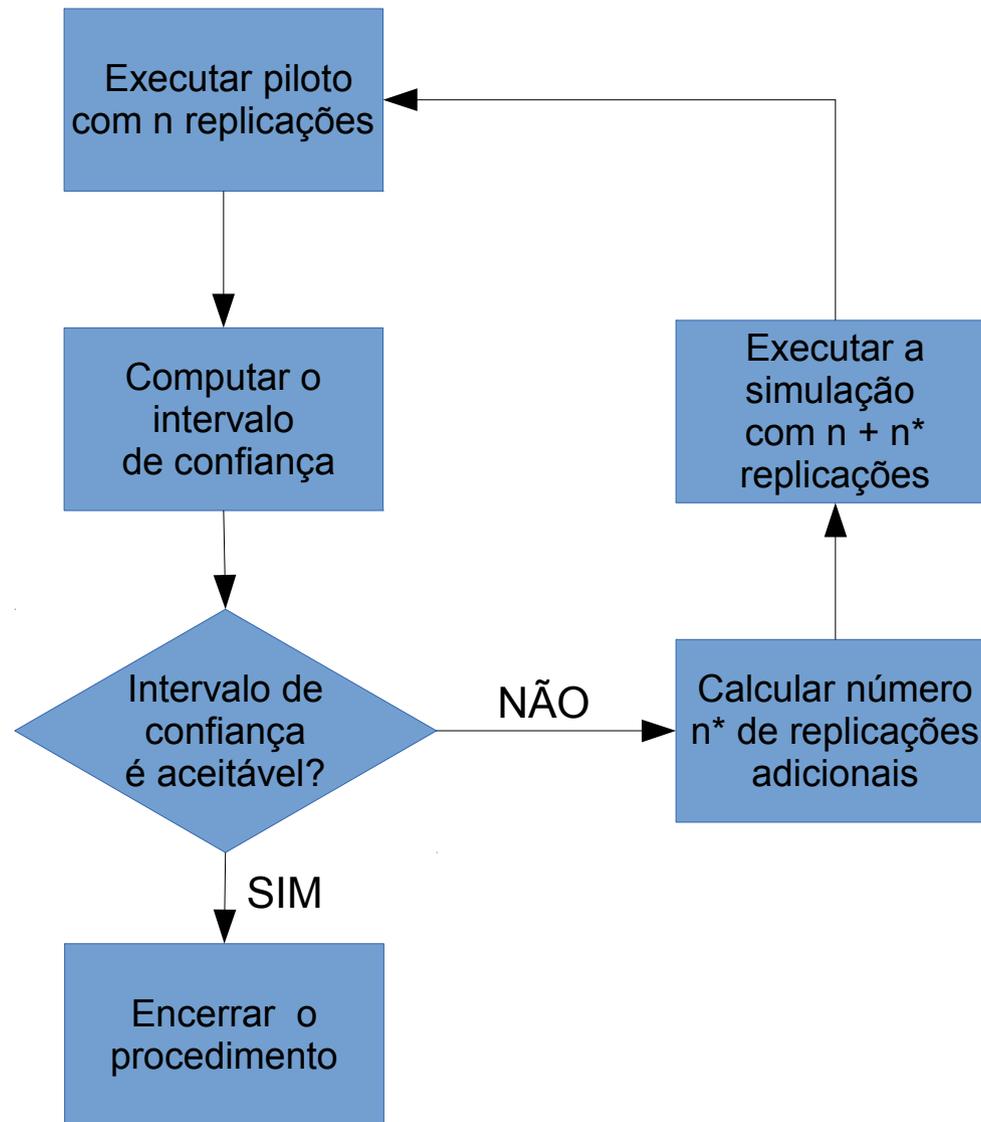
Rodada e Replicação - Aspectos Iniciais

- Qual é a duração apropriada de uma rodada de simulação?
- Como interpretar corretamente seus resultados?
- Como analisar corretamente as diferenças obtidas em cada uma das replicações?

Rodada e Replicação - Aspectos Iniciais

- Escolher o número de replicações necessários para a simulação;
- Colocar um número **pequeno** pode ser insuficiente para a análise;
- Colocar um número **grande** pode tornar o tempo da análise muito alto;
- Através de uma análise de precisão pode-se encontrar o número de replicações necessárias.

Análise de Replicação - Fluxograma



Análise de Replicação

- Número de Replicações (n^*)
 1. Calcular a médias das replicações [$média(n)$];
 2. Calcular o desvio padrão das replicações [s];
 3. Definir a precisão desejada [h^*];
 4. Simular com poucas replicações [sugestão = 10];
 5. TESTAR se precisão desejada [h^*] é menor que a metade da amplitude do intervalo de confiança [h] ($h^* < h$);

Análise de Replicação – Intervalo de Confiança

- **Intervalo de Confiança:** intervalo de valores que contém a média da população, com uma certa probabilidade (confiança estatística);
- **Precisão:** tamanho do intervalo de confiança
- **Confiança:** probabilidade de que o intervalo de confiança contenha a média. Valores usuais: 99%, 95% e 90%.

Análise de Replicação – Intervalo de Confiança

- A determinação de intervalos de confiança para as variáveis de interesse que medem o desempenho do sistema é um componente fundamental no processo de análise de resultados.
- O intervalo numérico que possui uma probabilidade igual a $(1 - \alpha)$ de incluir o verdadeiro valor da variável ou medida de desempenho sob análise, onde, $(1-\alpha)$ é denominado o nível de confiança do intervalo.
- $(1 - \alpha)$ pode assumir valores como 99% ou 90%. Desta forma, α , será o erro admitido ao se concluir sobre a presença do verdadeiro valor da variável no intervalo calculado

Análise de Replicação – Intervalo de Confiança

- Tamanho do intervalo denominado precisão

$$h = t_{n-1, \alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

S: desvio padrão

n: número dados da amostra

$t_{n-1, \alpha/2}$ (1- $\alpha/2$) percentil da distribuição t Student com n-1 graus de liberdades

Rodada e Replicação

- **Ex:** fila de banco.

<i>Replicação</i>	<i>Média de Pessoas em Fila</i>
1	6,72
2	2,00
3	0,38
4	1,28
5	0,46
6	0,19
7	0,14
8	1,30
9	0,12
10	2,85
<i>Média de 10 replicações</i>	1,54
<i>Desvio Padrão</i>	2,03

Análise de Replicação – Intervalo de Confiança

Liberdade	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,005	0,002	0,001
1	3,0777	6,3137	12,706	31,821	63,656	127,32	318,29	636,58
2	1,8856	2,9200	4,3027	6,9645	9,9250	14,089	22,329	31,600
3	1,6377	2,3534	3,1824	4,5407	5,8408	7,4532	10,214	12,924
4	1,5332	2,1318	2,7765	3,7469	4,6041	5,5975	7,1729	8,6101
5	1,4759	2,0150	2,5706	3,3649	4,0321	4,7733	5,8935	6,8685
6	1,4398	1,9432	2,4469	3,1427	3,7074	4,3168	5,2075	5,9587
7	1,4149	1,8946	2,3646	2,9979	3,4995	4,0294	4,7853	5,4081
8	1,3968	1,8595	2,3060	2,8965	3,3554	3,8325	4,5008	5,0414
9	1,3830	1,8331	2,2622	2,8214	3,2498	3,6896	4,2969	4,7809
10	1,3722	1,8125	2,2281	2,7638	3,1693	3,5814	4,1437	4,5868
11	1,3634	1,7959	2,2010	2,7181	3,1058	3,4966	4,0248	4,4369
12	1,3562	1,7823	2,1788	2,6810	3,0545	3,4284	3,9296	4,3178
13	1,3502	1,7709	2,1604	2,6503	3,0123	3,3725	3,8520	4,2209
14	1,3450	1,7613	2,1448	2,6245	2,9768	3,3257	3,7874	4,1403
15	1,3406	1,7531	2,1315	2,6025	2,9467	3,2860	3,7329	4,0728
16	1,3368	1,7459	2,1199	2,5835	2,9208	3,2520	3,6861	4,0149
17	1,3334	1,7396	2,1098	2,5669	2,8982	3,2224	3,6458	3,9651
18	1,3304	1,7341	2,1009	2,5524	2,8784	3,1966	3,6105	3,9217
19	1,3277	1,7291	2,0930	2,5395	2,8609	3,1737	3,5793	3,8833
20	1,3253	1,7247	2,0860	2,5280	2,8453	3,1534	3,5518	3,8496

Análise de Replicação – Intervalo de Confiança

<i>n</i>	<i>Confiança</i> $100(1-\alpha)\%$	<i>α</i>	$t_{n-1,\alpha/2}$	<i>Precisão (metade do intervalo)</i> $h = t_{n-1,\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}$	<i>Intervalo de Confiança da Média</i> ($\bar{x}=1,54$)
10	99%	0,01	3,25	2,09	$-0,55 \leq \mu \leq 3,63$
10	95%	0,05	2,26	1,45	$0,09 \leq \mu \leq 3,00$
10	90%	0,10	1,83	1,18	$0,37 \leq \mu \leq 2,72$
10	80%	0,20	1,38	0,89	$0,65 \leq \mu \leq 2,43$

Análise de Replicação – Intervalo de Confiança

- Três fatores influenciam a largura do intervalo de confiança:
 - O número de replicações n ;
 - O nível de confiança $(1 - \alpha)$ predefinido pelo analista;
 - Variação (S^2) associada à medida de desempenho sob análise.

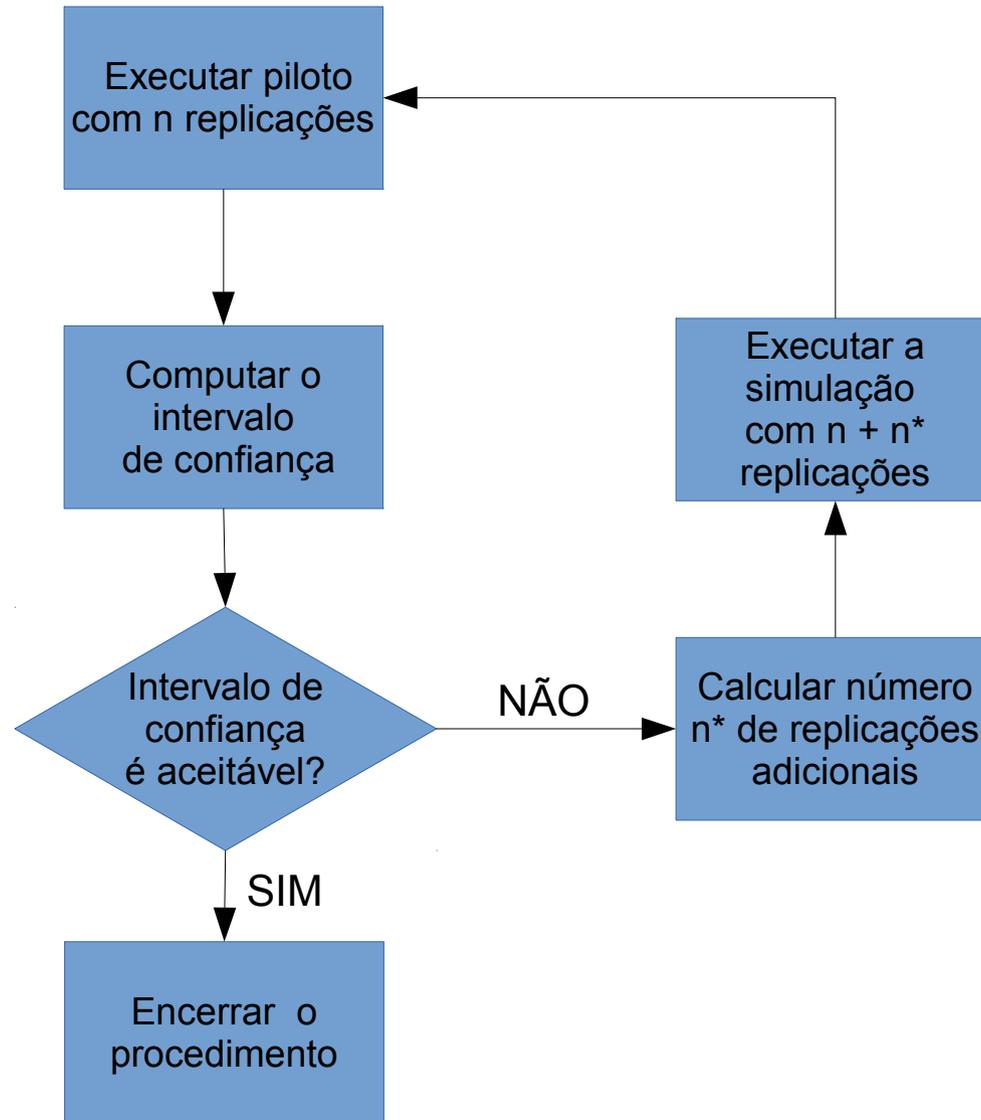
Análise de Replicação – Intervalo de Confiança

- O relacionamento entre estes três fatores ocorre da seguinte maneira:
 - Na medida em que se aumenta o número de replicações, reduz-se a largura do intervalo de confiança;
 - Na medida em que o nível de confiança aumenta, aumenta também a largura do intervalo de confiança. O intervalo com 99% de confiança será maior do que o aquele com 95% de confiança, uma vez mantidos os demais elementos;
 - Na medida que a variação (S^2) aumenta, cresce a largura do intervalo de confiança.

Análise de Replicação – Intervalo de Confiança

- Relações entre o número de replicações e o nível de confiança:
 - Se o nível de confiança é fixo, um grande número de replicações resultará num menor intervalo de confiança;
 - Se o tamanho do intervalo de confiança é fixo, um grande número de replicações resultará em um maior grau de confiança;
 - Se o número de replicações é fixo, um alto nível de confiança resultará um grande intervalo de confiança.

Análise de Replicação



Análise de Replicação

■ Número de Replicações (n^*)

- Para se atingir uma precisão desejada em determinado valor, necessita-se rodar o modelo várias vezes (sugestão 10 replicações); Fonte: Chwif & Medina (2006)

- Geração de uma AMOSTRA PILOTO de tamanho n e com precisão h . Utilizando-se a expressão a seguir, onde h^* é a precisão desejada, pode-se estimar o número de replicações necessárias n^* ;

$$n^* = \left\lceil n \left(\frac{h}{h^*} \right)^2 \right\rceil$$

Análise de Replicação

- Considere que foram realizadas 20 replicações de um modelo de simulação. Para essa amostra piloto, a precisão obtida foi de 0,95 minutos para a média do tempo em fila. Qual o número de replicações necessárias para obter uma precisão de 0,5 minutos?

$n=20$, $h=0,95$ e $h^*=0,5$:

$$n = \left\lceil 20 \left(\frac{0,95}{0,5} \right)^2 \right\rceil = \lceil 72,2 \rceil = 73$$

Prática 2 – Análise de Replicação

■ Prática 2 – Excel

- Exemplo: Serviço de atendimento em uma central financeira. Onde o que se pretende estudar é o tempo médio que um cliente gasta no sistema.

Considerações:

- * Confiança estatística – 95% (portanto $\alpha = 0,05$);
- * Precisão (h^*) máximo 0,5;

Prática 2 - Análise de Replicação

■ Distribuição t-Student (1°)

GL \ α	0,20	0,10	0,05	0,02
1	3,078	6,314	12,706	31,821
2	1,886	2,920	4,303	6,965
3	1,638	2,353	3,182	4,541
4	1,533	2,132	2,776	3,747
5	1,576	2,015	2,571	3,365
6	1,440	1,943	2,447	3,143
7	1,415	1,895	2,365	2,998
8	1,397	1,860	2,306	2,896
9	1,383	1,833	2,262	2,821
10	1,372	1,812	2,228	2,764

Prática 2 - Análise de Replicação

- Número de Replicações ($n^* = 10$)
 1. Calcular a médias das replicações [média(n)];
 2. Calcular o desvio padrão das replicações [s];
 3. Definir a precisão desejada [h^*];
 4. Simular com poucas replicações [sugestão = 10];
 5. TESTAR se precisão desejada [h^*] é menor que a metade da amplitude do intervalo de confiança [h] ($h^* < h$);Fonte: Chwif & Medina (2006)

Prática 2 - Análise de Replicação

- Número de Replicações (n^*)

$$n^* = \left[n \cdot \left(\frac{h}{h^*} \right)^2 \right]$$

$$n^* = \left[10 \cdot \left(\frac{0,8}{0,5} \right)^2 \right]$$

$$n^* = 25,6 \simeq 26 \text{ (Replicações)}$$

Prática 2 - Análise de Replicação

■ Número de Replicações ($n^* = 26$)

1. Calcular a médias das replicações [média(n)];
 2. Calcular o desvio padrão das replicações [s];
 3. Definir a precisão desejada [h^*];
 4. Simular com poucas replicações [sugestão = 10];
 5. TESTAR se precisão desejada [h^*] é menor que a metade da amplitude do intervalo de confiança [h] ($h^* < h$);
- Fonte: Chwif & Medina (2006)

Prática 2 - Análise de Replicação

■ Distribuição t-Student (2°)

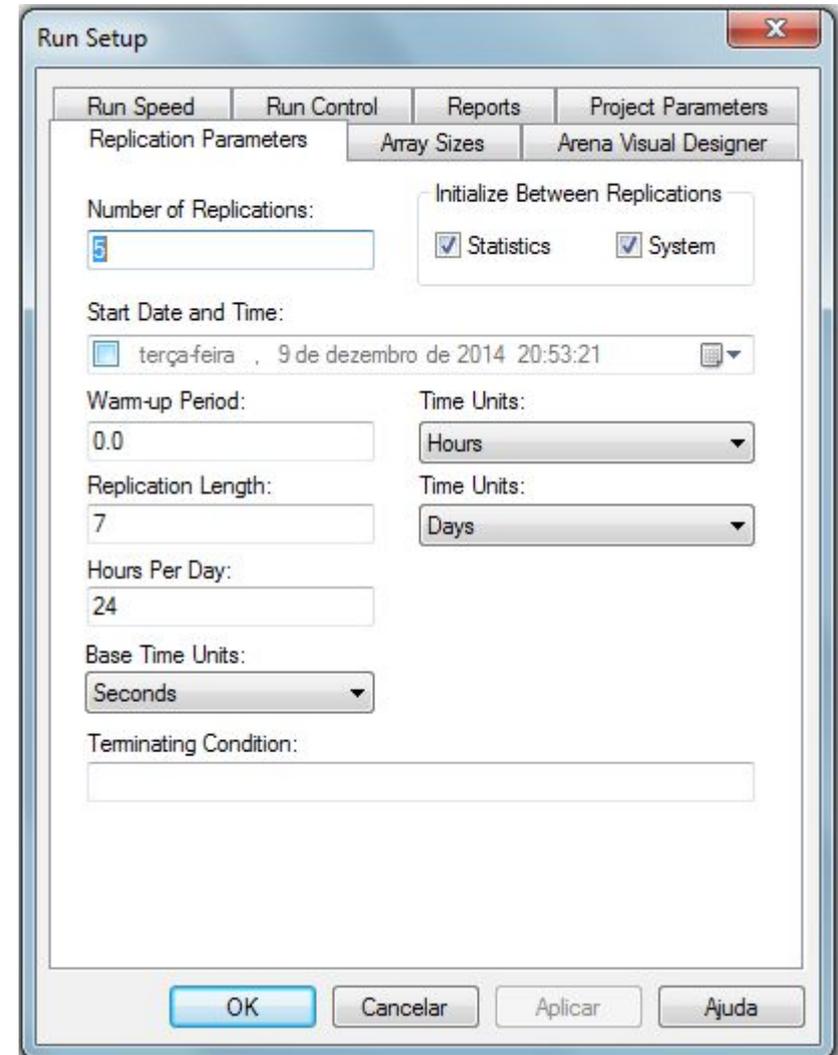
GL \ α	0,20	0,10	0,05	0,02
1	3,078	6,314	12,706	31,821
2	1,886	2,920	4,303	6,965
3	1,638	2,353	3,182	4,541
4	1,533	2,132	2,776	3,747
5	1,576	2,015	2,571	3,365
6	1,440	1,943	2,447	3,143
7	1,415	1,895	2,365	2,998
8	1,397	1,860	2,306	2,896
9	1,383	1,833	2,262	2,821
10	1,372	1,812	2,228	2,764
11	1,363	1,796	2,201	2,718
12	1,356	1,782	2,179	2,681
13	1,350	1,771	2,160	2,650
14	1,345	1,761	2,145	2,624
15	1,341	1,753	2,131	2,602
16	1,337	1,745	2,120	2,583
17	1,333	1,740	2,110	2,567
18	1,330	1,734	2,101	2,552
19	1,328	1,729	2,093	2,539
20	1,325	1,725	2,086	2,528
21	1,323	1,721	2,080	2,518
22	1,321	1,717	2,074	2,508
23	1,319	1,714	2,069	2,500
24	1,318	1,711	2,064	2,492
25	1,316	1,708	2,060	2,485
26	1,315	1,706	2,056	2,479
27	1,314	1,703	2,052	2,473
28	1,313	1,701	2,048	2,467

Prática 3 - Arena

- Exemplo: Atualmente, um sistema web de ensino a distancia, a chegada de requisições ocorre em intervalos exponencialmente distribuídos, em média, a cada 10s. A requisição é processada no servidor web em 5s. O objetivo a ser alcançado é um tempo de espera na fila abaixo de 3s e deverá ser analisado sob dois aspectos:
 - Sem considerar CUSTO (Aumentar o número de servidores web)
 - Considerando CUSTO (Diminuir o tempo de atendimento)

Simulação - Arena

- Prática 3 - Arena
 - Considerações de simulação:



Prática 4 - Arena

- Exemplo: Uma central de atendimento de emergência recebe uma chamada em média a cada 15 minutos seguindo uma distribuição exponencial. Os tipos de chamadas possuem as seguintes características:

Tipo de chamada	Porcentagem das chamadas	Tempo de atendimento (min)
Falsa	15% total de chamadas	TRIA(10;11;13)
Emergência sem risco de vida	85% das não falsas	NORMAL(25;1)
Emergência com risco de vida	15% das não falsas	TRIA(18;21;30)

- **Art of Computer Systems Performance Analysis Techniques For Experimental Design Measurements Simulation And Modeling**, by Raj Jain, Wiley Computer Publishing, John Wiley & Sons, Inc.
- **Simulation Modeling Handbook: A practical Approach**, by Christopher A. Chung. CRC Press, NY, Washington, D.C, 2004.
- CHWIF, Leonardo; MEDINA, Afonso C. **Modelagem e simulação de eventos discretos, teoria & aplicações**. Segunda edição. São Paulo, 2007.

Perguntas?



Obrigado!



Jackson Nunes
jns@cin.ufpe.br



Marco Eugênio Araújo
maea@cin.ufpe.br

