Continuous-time Markov chain: Métodos de Análise Estacionária

Jeandro Bezerra, Rhudney Simoes e Tiago Luis

Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Informática
Tópicos Avançados em Avaliação de Desempenho
Prof. Paulo Maciel e Ricardo Massa

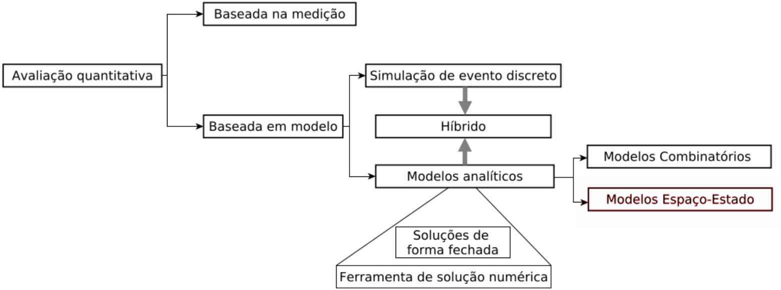
16 de setembro de 2015

- Gauss-Seidel

3 Processos de Nascimento e Morte

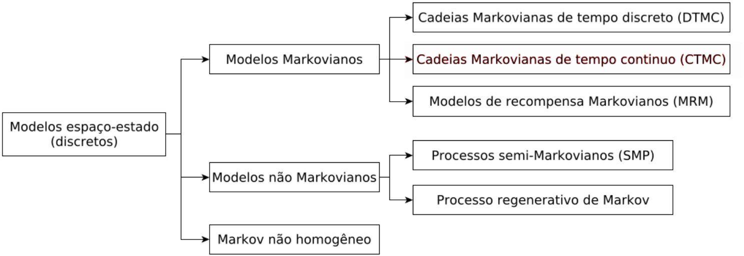
4 Referências

Taxonomia de modelos quantitativos



fonte:[Melo, Robson and Santos, Aldri and Nogueira, Michele and Mehdi, Deep]

Modelos de espaço-estado



fonte:[Melo, Robson and Santos, Aldri and Nogueira, Michele and Mehdi, Deep]

Cadeia de Markov

Temos um sistema que queremos analisar.
Para que modelos ?
Por que cadeias de Markov ?
Exemplos de uso:

- Jogos
- Estatística
- Computação (aplicação em nuvem [Khazaei et al. 2012], SDN [Shao et al. 2013])

Cadeia de Markov

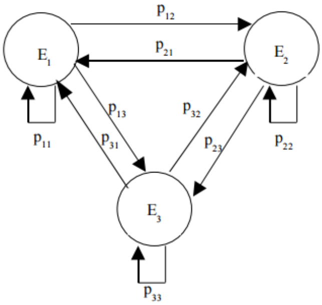
Uma cadeia de Markov define um modelo de transição probabilístico $T(x \rightarrow x')$ sobre estados x:
- para todo $x : \sum_{x'} T(x \rightarrow x') = 1$

Conceitos necessários

- Diagrama de transição
- Vetor de probabilidade
- Matriz de transição
- Regime estacionário

Diagrama de transição

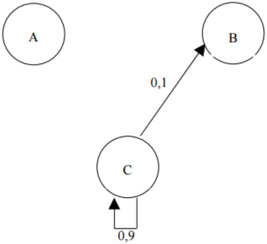
- Transição entre estados



Vetor de probabilidade

$$V_i = [p_{ij} \;\; p_{ik} \;\; p_{il}]$$

- V $C = [0; 0,1; 0,9]$



Matriz de transição

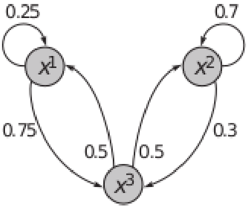
$$M = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}$$

- Determinação de probabilidades futuras

$$V_i^t = V_i * M^{t-1}$$

Distribuição Estacionária

$$P^t(x') \approx P^{t+1}(x') = \sum_x P^t(x) T(x \to x')$$
$$\pi(x') = \sum_x \pi(x) T(x \to x')$$



Resolução Exemplo 1

$$\pi(x^1) = 0.25\pi(x^1) + 0.5\pi(x^3)$$
$$\pi(x^2) = 0.7\pi(x^2) + 0.5\pi(x^3)$$
$$\pi(x^3) = 0.75\pi(x^1) + 0.3\pi(x^2)$$
$$\pi(x^1) + \pi(x^2) + \pi(x^3) = 1.$$

Portanto,

$$\pi(x^1) = 0.2, \pi(x^2) = 0.5, \pi(x^3) = 0.3$$

Cadeia de Markov Regular

- Uma cadeia de Markov é regular se existe k tal que, para cada x, x', a probabilidade de se alcançar x a x' em exatos k passos é > 0
- Teorema: Uma cadeia de Markvo regular converge para uma única distribuição estacionária independentemente do estado inicial.

CTMC - Continuous-time Markov Chain

Definição CTMC:

$X(t) = j$

$P(X(t) = j)$ é a probabilidade de estar em j no instante t.

Falta de memória

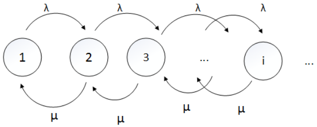
$$P(X(t+\Delta t) = i | X(t) = j, X(t-\Delta t) = h) = P(X(t+\Delta t) = i | X(t) = j)$$

CTMC - Continuous-time Markov Chain

- Tempo até uma transição é exponencial;
- γ_{ji}: taxa de saída de j para i;
- Imagine um relógio com tempo entre tiques exponencial;

Exemplo M/M/1

Taxa de chegada: λ
Taxa de serviço: μ



Vida Residual não é representada

CTMC - Continuous-time Markov Chain

$$Q = MatrizdeTaxas = \begin{bmatrix} q_{00} & q_{01} & q_{02} & \cdots \\ q_{10} & q_{11} & q_{12} & \cdots \\ q_{20} & \cdots & & \\ \vdots & & & \end{bmatrix}$$

$$q_{11} = -(q_{10} + q_{12} + \cdots)$$

π_j =probabilidade de estar em j / fração de tempo que o sistema passa em j
$\pi = (\pi_0, \pi_1, \cdots)$
Taxa de saída condicional de i :$\sum_{\forall j \neq i} q_{ij}$

- Considerar T muito grande

Tempo no estado $i = T.\pi_i$ Número esperado de transições de saída do estado $i = T.\pi_i$ taxa de saída condicional de i
$= T.\pi_i \cdot \sum_{\forall j \neq i} q_{ij}$

CTMC - Continuous-time Markov Chain

P_{ij} Probabilidade de ir de i para j dado que partirmos de i

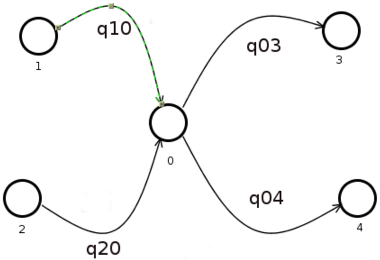
$$P_{ij} = \frac{q_{ij}}{\sum_{\forall j \neq i} q_{ij}}$$ Taxa de saída condicional de i

$$\text{Taxa de entrada em } i = \sum_{\forall j \neq i} \pi_j q_{ji}$$

$$\text{Taxa de saída de } i = \sum_{\forall j \neq i} \pi_i q_{ij}$$

Análise Estacionária

$T \to \infty$, sistema em equilíbrio
com isso, TAXA DE ENTRADA = TAXA DE SAÍDA
Transições de entrada = transições de saída



Igualando as transições de entrada e saída de 0:

$$T\pi_1 q_{10} + T\pi_2 q_{20} = T\pi_0(q_{03} + q_{04})$$

$$\pi_1 q_{10} + \pi_2 q_{20} - \pi_0(q_{03} + q_{04}) = 0$$

$$(\pi_0 \pi_1 \pi_2 \cdots) \cdot \begin{bmatrix} q_{00} & \cdots \\ q_{10} & \cdots \\ q_{20} & \cdots \\ \vdots & \end{bmatrix} = 0$$

$$\pi_0(q_{00} + \pi_1(q_{10} + \pi_2(q_{20} = 0$$

Lembrando que: $q_{00} = -(q_{03} + q_{04})$

$$\sum_{\forall i} \pi_i = 1$$

Gauss-Seidel

- Derivado do método Gauss-Jacobi
- Utiliza valores das iterações anteriores para acelerar a convergência
- Critério de parada: especificar um erro máximo
- Critérios de convergência: Sassenfeld e linhas

Critério de Convergência

$$\beta_1 = \sum_{j=2}^{n} \frac{|a_{1j}|}{|a_{11}|},$$

$$\beta_i = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{|a_{ij}|\beta_j}{|a_{ii}|} + \sum_{j=i+1}^{n} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|}.$$

Figura: Sassenfeld

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|$$

Critério de Parada

$$(i)\ \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| < \epsilon \text{ (erro absoluto)},$$

$$(ii)\ \frac{\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|}{\|x^{(k)}\|} < \epsilon \text{ (erro relativo)}.$$

Gauss-Seidel

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1 \, e \, j \neq i}^{n} a_{ij} x_j^{(k) \to i > j, (k-1) \to i < j} \right)$$

Figura: Fórmula geral

Gauss-Seidel

$$
\begin{cases}
20X_1 + X_2 + X_3 + 2X_4 = 33 \\
X_1 + 10X_2 + 2X_3 + 4X_4 = 38,4 \\
X_1 + 2X_2 + 10X_3 + X_4 = 43,5 \\
2X_1 + 4X_2 + X_3 + 20X_4 = 45,6
\end{cases}
$$

$$\varepsilon < 6 \cdot 10^{-4}$$

Processos de Nascimento e Morte

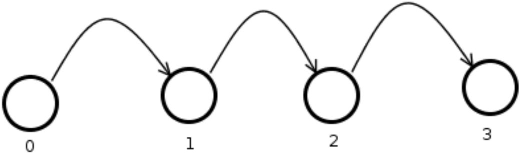
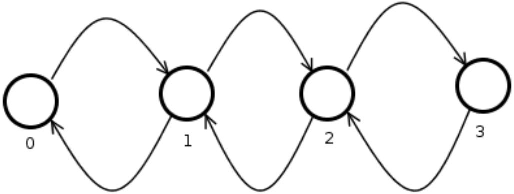
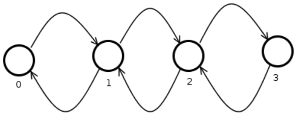


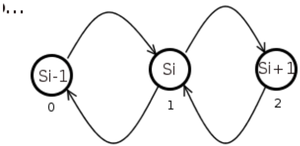
Figura:

Processos de Nascimento e Morte



Processos de Nascimento e Morte





Referências I

[ctm]

Cmtc - cadeias de markov de tempo contínuo.

Khazaei, H., Misic, J., and Misic, V. (2012).
Performance analysis of cloud computing centers using m/g/m/m+r queuing systems.
Parallel and Distributed Systems, IEEE Transactions on, 23(5):936–943.

Referências II

Melo, Robson and Santos, Aldri and Nogueira, Michele and Mehdi, Deep.
Modelagem e Projeto de Redes sem Fio Heterogêneas Resilientes e Sobreviventes.

Shao, Z., Jin, X., Jiang, W., Chen, M., and Chiang, M. (2013).
Intra-data-center traffic engineering with ensemble routing.
In *INFOCOM, 2013 Proceedings IEEE*, pages 2148–2156.